ВВЕДЕНИЕ

Настоящие учебно-методические материалы предназначены для студентов заочной формы обучения и являются руководством для изучения дисциплины “Высшая математика”. Они содержат в себе основные рекомендации студентам-заочникам при выполнении контрольных работ, а также методические указания по изучению разделов курса высшей математики «Элементы линейной алгебры», «Элементы векторной алгебры и аналитическая геометрия», с решениями типичных примеров. В разобранных задачах приведено примерное их оформление с пояснениями.

В материалах приведены контрольные задания для двадцати пяти вариантов, которые разбиты на три раздела.

Данное методическое пособие является одним из составных частей организационно-методического обеспечения студентов заочного обучения кафедры математики и естественных наук для студентов инженерных специальностей

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТАМ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ ПРИ РАБОТЕ НАД КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТОЙ

1. В процессе изучения дисциплины студент-заочник должен выполнить контрольные работы по различным разделам высшей математики, которые рецензируются преподавателем. Рецензия на выполненную работу позволяет студенту судить о степени усвоения им материала курса, указывает на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление его дальнейшей работы и помогает сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточное количество задач по изучаемому материалу.

3. Каждая контрольная работа должна выполняться самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможность преподавателю - рецензенту указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к сдаче итогого контроля.

4. Контрольная работа должна быть прислана в срок (до сессии). Невыполнение этого требования не дает возможности рецензенту своевременно указать студенту на допущенные им ошибки и удлиняет срок рецензирования работы.

5. При выполнении и оформлении контрольной работы студент должен строго придерживаться следующих правил:

а) контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради с оставлением полей для замечаний преподавателя-рецензента;

б) на обложке тетради в заголовке указывается

- контрольная работа по высшей математике и её номер,
- фамилия и инициалы студента, номер зачетной книжки,
- факультет, курс и группа,
- дата отсылки работы в высшее учебное заведение и обратный адрес студента;

в) решение задач следует располагать в порядке следования их номеров;

г) перед началом самого решения задачи необходимо полностью записать ее условие, заменив, если необходимо, буквенные обозначения числовыми данными, соответствующими своему варианту;

д) все основные этапы решения задач следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями;

ж) в конце контрольной работы указывается используемая литература.

6. Студент выполняет вариант контрольных работ, соответствующей последным двум цифрам рейтинговой книжки. При этом, эти две цифры делятся на 25 и остаток означает номер варианта контрольной работы, который должен выполнят студент. Если последные две цифры рейтинговой книжки 00, 25, 50, 75, то студент выполняет вариант № 25.

7. После получения прорецензированной контрольной работы студент должен исправить отмеченные ошибки и предоставить ее на повторное рецензирование.

8. Без предъявления соответствующей прорецензированной и зачтенной контрольной работы студент не допускается к итоговому контролью по предмету “Высшая математика”.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПО КУРСУ “ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА”, ЧАСТЬ1.

Элементы линейной алгебры

Определители второго и третьего порядков. Определитель n- ого порядка. Свойства и способы вычисления определителей.

Матрицы. Операции сложения матриц и умножения на число. Умножение матриц. Обратная матрица. Ранг матрицы.

Решение систем n- линейных уравнений с n неизвестными: 1) по формулам Крамера; 2) матричным методом. Системы m - линейных уравнений с n неизвестными. Совместность системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Однородные системы уравнений.

Элементы векторной алгебры и аналитическая геометрия

Векторы. Линейные операции над векторами и их свойства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Базис. Векторы в декартовой системы координат.

Скалярное и векторное произведение двух векторов. Смешанное произведение трех векторов.

Уравнение линии и поверхности. Уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости.

Общее уравнение линий второго порядка. Окружность и эллипс. Гипербола. Парабола.

Полярные координаты. Линии в полярных координатах.

Поверхность и линия в пространстве. Уравнения плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Расстояние от точки до плоскости.

Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямой в пространстве. Взаимное расположение линии и плоскости в пространстве. Расстояние от точки до прямой в пространстве.

Общее уравнение поверхностей второго порядка. Сфера и эллипсоиды. Гиперболоиды. Конические поверхности. Параболоиды. Цилиндрические поверхности.

Введение в математический анализ

Множество. Элементы математической логики. Действительные числа.

Понятие комплексного числа.. Формы записей комплексного числа. Действия над комплексными числами.

Числовая последовательность. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Предел последовательности. Сходящиеся последовательности. Число e.

Функция. Основные элементарные функции. Обратная функция. Сложная функция. Класс элементарных функций. Гиперболические функции. Неявно заданные и параметрически заданные функции.

Определение непрерывности функции. Свойства непрерывных функций. Точки разрыва функции. Равномерная непрерывность.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Д.Т.Писменный. Конспект лекций по высшей математике: польный курс- М: Айрис-пресс, 2009.

2. А.П.Рябушко и др. Сборник задач индивидуальных заданий по высшей математике. Ч. 2– Минск, Высшая школа, 1991.

3. О.В Зимина, А.И.Кириллов, Т.А. Сальникова, Высшая математика. М.: Физматлит, 2001.

4 П.С. Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. Высая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. –М.: 2003.

5. К.Н.Лунгу, Е.В.Макаров. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч.1 – М.: Физматлит, 2007.

6. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. 1том. СПб. “Политехника”, 2003.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

В данном разделе методических указаний приведены примеры решения типовых задач контрольных заданий. Решение задач приведено по темам, которые студент должен изучить в процессе выполнения контрольной работы. Решенные задачи содержат формулы и пояснения, которые могут быть использованы студентом, при выполнении заданий своего варианта. В то же время, тех теоретических сведений, которые приведены в задачах, недостаточно для сдачи итогого контроля по курсу «Высшая математика», они могут быть использованы лишь при решении практических задач и выполнении контрольной работы.

ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Пример 1. Вычислить определитель: а) разложив его по элементам i-й строки; б) разложив его по элементам j- го столбца; в) получив предварительно нули в j-й строке.

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, i=2,\ j=2.$$

Решение. а) Разложим определитель по элементам второй строки.

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23} + a_{24}A_{24} = .$$

$$= -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot(3+2+0-0-2-0) - (-12+4+0-0+8+18) - 2\cdot(0+2+0-0+4+9) +$$

$$+ 3(0+2-6-0+4+6) = -6-18-30+18 = -36.$$

б) Разложим определитель по элементам второго столбца:

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} = -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32} + a_{42}A_{42} =$$

$$= -1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 + 1\cdot\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(6+4-18-6-4+18) - (-12+4+0-0+8+18) +$$
$$+ (-8-18+0-0+12-4) = -0-18-18 = -36.$$

в) Вычислим определитель, получив предварительно нули во второй столбце. Для этого:

- прибавим первую строку ко второму;
- умножим первую строку на (-1) и прибавим к четвертому;
- разложим полученный определитель по элементам второго столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе преобразуем в нуль все элементы кроме a_{22}. Так как элемент a_{32} равен нулю, преобразуем в нуль только a_{12}, для чего умножим вторую строку на (-4) и прибавим к первому и полученный определитель разложим по элементам второго столбца:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 10 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -36.$$

Пример 2. Даны матрицы A, B и числа α, β. Найти матрицы $\alpha A + \beta B$, AB, A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = -4, \quad \beta = 4.$$

Решение. а) чтобы найти матрицу $\alpha A+\beta B$, умножим элементы матрицы A на α, а элементы матрицы B на β и прибавим элементы матрицы αA на соответствующие элементы матрицы βB:

$$\alpha A+\beta B=(-4)\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-16 & -4 & 16\\ -8 & 16 & -24\\ -4 & -8 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -4 & 4\\ 8 & 20 & 0\\ 4 & 4 & 8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-16+0 & -4+(-4) & 16+4\\ -8+8 & 16+20 & -24+0\\ -4+4 & -8+4 & 4+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -8 & 20\\ 0 & 36 & -24\\ 0 & -4 & 12\end{pmatrix}.$$

б) Вычислим матрицу AB по правилу произведения матриц:

$$AB=\begin{pmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0+2-4 & -4+5-4 & 4+0-8\\ 0-8+6 & -2-20+6 & 2+0+12\\ 0+4-1 & -1+10-1 & 1+0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -4\\ -2 & -16 & 14\\ 3 & 8 & -1\end{pmatrix}.$$

в) Вычислим определитель матрицы A:

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=16+6-16-16-48+2=-56\neq 0.$$

Находим алгебраические дополнения A_{ij}:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-4 & 6\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-8,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & -1\end{vmatrix}=8,\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}4 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -4\\ -4 & 6\end{vmatrix}=-10,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}4 & -4\\ 2 & 6\end{vmatrix}=-32,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-18.$$

Следовательно

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\frac{1}{-56}\begin{pmatrix} -8 & -7 & -10 \\ 8 & 0 & -32 \\ 8 & -7 & -18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{5}{28} \\ -\frac{1}{7} & 0 & \frac{16}{28} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{9}{28} \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Проверить совместность системы уравнений по теореме Кроникера –Капелли и решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + \ x_2 + 3x_3 = -3, \\ \ x_1 - 5x_2 - \ x_3 = -10, \\ 3x_1 + 4x_2 + \ x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение Сделаем элементарные преобразования на расширенной матрице системы:

$$C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -5 & -1 & -10 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)\sim \begin{array}{c} \\ -2 \\ -3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & -10 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & -10 \\ 0 & 11 & 5 & 17 \\ 0 & 19 & 4 & 34 \end{array}\right)\sim :11\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & \frac{17}{11} \\ 0 & 19 & 4 & 34 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ -19 \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & \frac{17}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{51}{11} & \frac{51}{11} \end{array}\right)\sim :\left(-\frac{51}{11}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & \frac{17}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

$r(A)=3=3=r(C)$. Значить, исходная система совместна.

1) ***Решение системы по формулам Крамера***.

Находим основной и дополнительные определители системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=51; \qquad \Delta x_1=\begin{vmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -10 & -5 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-51;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 102; \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & -10 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -51;$$

Тогда по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-51}{51} = -1; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{102}{51} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-51}{51} = -1.$$

2) ***Решение системы матричным методом.***

Для системы $\Delta = 51$. Находим обратную матрицу:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 19;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -11.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{51}\begin{pmatrix} -1 & 11 & 14 \\ -4 & -7 & 5 \\ 19 & -5 & -11 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы по формуле $X = A^{-1}B$:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{51}\begin{pmatrix} -1 & 11 & 14 \\ -4 & -7 & 5 \\ 19 & -5 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{51}\begin{pmatrix} 3-110+56 \\ 12+\ 70+20 \\ -57+\ 50-44 \end{pmatrix} = \frac{1}{51}\begin{pmatrix} -51 \\ 102 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

3) ***Решение системы по методу Гаусса***.

Первый этап метода Гаусса был выполнен выше при проверке системы на совместность и получена матрица в виде:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & \frac{17}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Выполним второй этап метода Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - \quad x_3 = -10, \\ \qquad x_2 + \dfrac{5}{11}x_3 = \dfrac{17}{11}, \\ \qquad\qquad x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \qquad\qquad x_3 = -1, \\ \qquad x_2 + \dfrac{5}{11}\cdot(-1) = \dfrac{17}{11}, \\ x_1 - 5x_2 - \quad (-1) = -10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \qquad x_3 = -1, \\ \qquad x_2 = \quad 2, \\ x_1 - 5\cdot 2_2 = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = \ 2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Пример 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - \ x_2 - \ x_3 = 0, \\ \ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + \ x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение: а) Сделаем элементарные преобразования на матрице системы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -5 \\ \\ -3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -16 & -36 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & -8 & -18 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -16 & -36 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = 2,\ n = 3,\ r < n.$ то система имеет бесконечно много решений.

Решим систему

$$\begin{cases} 5x_1 - \ x_2 - \ x_3 = 0, \\ \ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - \ x_2 = x_3, \\ \ x_1 + 3x_2 = -7x_3. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} x_3 & -1 \\ -7x_3 & 3 \end{vmatrix} = -4x_3, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 5 & x_3 \\ 1 & -7x_3 \end{vmatrix} = -36x_3.$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = -\frac{x_3}{4}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = -\frac{9x_3}{4}.$$

Пусть, $x_3 = -4k$ ($k -$ произвольный коэффициент), тогда решение исходной системы имеет вид: $x_1 = k,\ x_2 = 9k,\ x_3 = -4k.$

ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пример 5. Даны координаты вершины треугольника ABC: а) составить уравнения высоты, проходящей через вершину C и найти ее длины; б) Составить уравнения медианы, проходящей через вершину B и найти точки пересечения медиан; с) найти угол A и составить уравнения биссектрисы угла A.

$$A(0-2),\ B(-5;10),\ C(4;1).$$

Решение: а) Уравнение стороны AB находим по формуле уравнения прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x+5}{0+5}=\frac{y-10}{-2-10},\quad 12x+5y+10=0\ (AB).$$

Следовательно

$$y=-\frac{12}{5}x-2,\ k_1=-\frac{12}{5}.$$

Составляем уравнение высоты CM, как прямой, проходящей через точку C, перпендикулярно к прямой AB:

$$y-1=k(x-4),\ y-1=-\frac{1}{k_1}(x-4),\ y-1=\frac{5}{12}(x-4),$$

$$5x-12y-8=0\ (CM).$$

Длина высоты CM равна расстоянию между точкой C и прямой AB. Согласно формулу для расстояния между точкой и прямой, имеем

$$|CM|=\frac{|12\cdot4+5\cdot1+10|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{63}{13}(u.b.).$$

б) Точка $N(x;y)$ находиться в середине стороны AC. Поэтому координаты точки $N(x;y)$ находим по формулам середины отрезка:

$$x=\frac{0+4}{2}=2,\quad y=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}\ \text{ или }\ N\left(2;-\frac{1}{2}\right).$$

Составим уравнения медианы BN:

$$\frac{x+5}{2+5}=\frac{y-10}{-\frac{1}{2}-10},\quad 3x+2y-5=0\ (BN).$$

Согласно свойствам медиан треугольников, в точке пересечения медиан $K(x;y)$ будет выполняться равенства: $\dfrac{|BK|}{|KN|}=\dfrac{2}{1}=2$.

Тогда

$$x=\frac{-5+2\cdot2}{1+2}=-\frac{1}{3};\ y=\frac{10-2\cdot\frac{1}{2}}{1+2}=3\ \text{ или }\ K\left(-\frac{1}{3};3\right).$$

в) Составим уравнения стороны AC:

$$\frac{x-0}{4-0}=\frac{y+2}{1+2},\quad 3x-4y-8=0\ (AC).$$

Пусть $\angle A=\varphi$ угол между прямыми AB и AC. Тогда

$$\cos\varphi=\frac{12\cdot 3+5\cdot(-4)}{\sqrt{12^2+5^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{16}{65}\ \text{или}\ \ \varphi=\arccos\frac{16}{65}\approx 0{,}3134.$$

Пусть биссектриса угла A пересекается со стороной CB в точке $L(x;y)$ (Рис.1). По свойствам биссектрисы треугольника, имеем

$$\frac{|\overrightarrow{CL}|}{|\overrightarrow{LB}|}=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(4-0)^2+(1+2)^2}=5\ \text{и}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-5-0)^2+(10+2)^2}=13$$

$$\frac{|\overrightarrow{CL}|}{|\overrightarrow{LB}|}=\frac{5}{13}.$$

Тогда

$$x=\frac{4+\frac{5}{13}\cdot(-5)}{1+\frac{5}{13}}=\frac{3}{2},\quad y=\frac{1+\frac{5}{13}\cdot 10}{1+\frac{5}{13}}=\frac{7}{2}$$

или $L\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$.

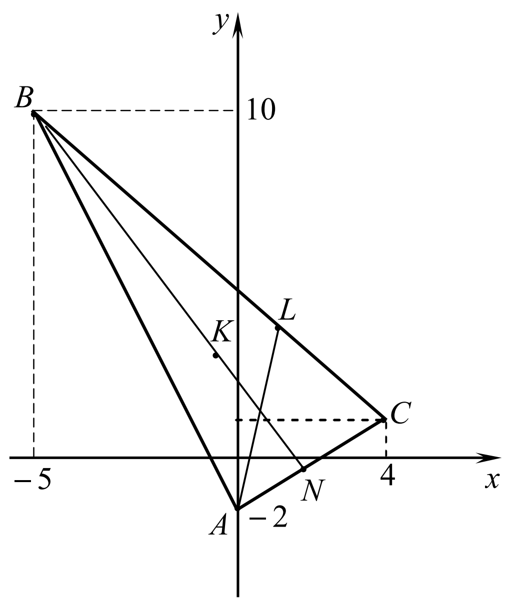


Рис.1.

Теперь по двум известным точкам A и L составляем уравнение биссектрисы AL:

$$\frac{x-0}{\frac{3}{2}-0}=\frac{y+2}{\frac{7}{2}+2}$$

$$11x-3y-6=0\ (AL).$$

Пример 6. 1. Найти уравнение геометрического места точек $M(x;y)$, отношение расстояний которых от точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ равной на a.

$$A(3;-2),\ B(4;6),\ a=\frac{3}{5}.$$

Решение: На основании формулы для определения расстояния между двумя точками, находим

$$|AM|=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2},\quad |BM|=\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}.$$

По условию задачи

$$\frac{|AM|}{|BM|}=a\ \text{или}\ \frac{\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}}{\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}}=\frac{3}{5}.$$

Следовательно:

$$25(x^2-6x+9+y^2+4y+4)=9(x^2-8x+16+y^2-12y+36),$$

$$25x^2-150x+25y^2+100y+325=9x^2-72x+9y^2-108y+468,$$

$$16x^2-78x+16y^2+208y=143,$$

$$16\left(x^2-\frac{39}{8}x+y^2+13y\right)=143,$$

$$x^2-2\cdot\frac{39}{16}x+\left(\frac{39}{16}\right)^2+y^2+2\cdot\frac{13}{2}y+\left(\frac{13}{2}\right)^2=\frac{143}{16}+\left(\frac{39}{16}\right)^2+\left(\frac{13}{2}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{39}{16}\right)^2+\left(y+\frac{13}{2}\right)^2=\left(\frac{15\sqrt{65}}{16}\right)^2.$$

Это уравнение определяет окружность с центром в точке $C\left(\frac{39}{16};-\frac{13}{2}\right)$ и радиусами $R=\frac{15\sqrt{65}}{16}$.

2. Найти уравнение геометрического места точек $M(x;y)$, отношение расстояний которых от точки $A(x_1;y_1)$ до прямой $x=b$, равным на m.

$$A(6;0),\ x=\frac{3}{2},\ m=2.$$

Решение: На основании формул расстояние между двух точек и расстояния между точкой и прямой, имеем

$$|AM|=\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2},\quad |BM|=\left|x-\frac{3}{2}\right|.$$

По условию задачи

$$\frac{|AM|}{|BM|}=m \text{ или } \frac{\sqrt{(x-6)^2+y^2}}{\left|x-\frac{3}{2}\right|}=2.$$

Следовательно

$$(x-6)^2+y^2=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2,$$

$$x^2-12x+36+y^2=4\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right),$$

$$x^2-12x+36+y^2=4x^2-12x+9,$$

$$3x^2-y^2=27,\quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1.$$

Эта кривая является – гипербола, с фокусами на оси Ox и полуосьями $a=3,\ b=3\sqrt{3}$.

. **_Пример 7._** Даны вершины пирамиды $ABCD$. Найти: уравнения ребра AB; б) уравнения грани ABC; с) уравнения и длину высоты, опущенной из D на ABC; в) уравнение прямой, проходящей через C параллельной AB; г) уравнения плоскости проходящей через D перпендикулярной AB; д) синус угла между ребром AD и грани ABC; е) косинус угла между гранями ABC и ABD.

$$A(2;1;7),\ B(3;3;6),\ C(2;-3;9),\ D(1;2;5).$$

Решение: а) Запишем каноническое уравнение прямой AB, для чего воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-7}{6-7}$$

или

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-7}{-1}\ (AB).$$

б) Уравнение грани ABC находим на основании уравнения плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-7 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Следовательно

$$y+2z-15=0\ (ABC).$$

Высота DE перпендикулярна грани ABC. Из условия перпендикулярности прямой DE и плоскости ABC следует, что в качестве направляющего вектора прямой $\vec{s}=\{p;q;r\}$ можно взять нормальный вектор $\vec{n}_1=\{0;1;2\}$ плоскости ABC. Тогда каноническая уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{2}\ (DE).$$

В соответствии с формулой расстояние от точки до плоскости имеем

$$|DE|=\frac{|0\cdot1+1\cdot2+2\cdot5-15|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}}\ ,\quad |DE|=\frac{3\sqrt{5}}{5}(см).$$

в) Так как прямая CF параллельна прямой AB, то их направляющие векторы совпадают: $\vec{s}_1=\vec{s}_2=\{1;2;-1\}$. Следовательно, уравнение прямой CF имеет вид:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-9}{-1}\ (CF).$$

г) Так как плоскост проходящей через вершину D перпендикулярно прямой AB, то в качестве направляющего вектора этой прямой $\vec{s}_1=\{1;2;-1\}$ можно взять нормальный вектор $\vec{n}_2=\{A;B;C\}$ искомой плоскости. Поэтому уравнения плоскости находим по уравнение плоскости проходящей данной точки и перпендикулярной данному вектору:

$$1\cdot(x-1)+2\cdot(y-2)+(-1)\cdot(z-5)=0$$

или

$$x+2y-z=0.$$

в) составим уравнение прямой AD:

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-7}{-2}\ (AD).$$

Синус угла между прямой AD и плоскости ABC находим используя формулу, определяющей угла между прямой и плоскости.

$$\sin\varphi=\frac{0\cdot(-1)+1\cdot1+2\cdot(-2)}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{-3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}\approx-0{,}54$$

е) Составим уравнения грани ABD:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-7 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

или

$$x-y-z+6=0\ (ABD).$$

Косинус угла между плоскастями ABC и ABD находим по формулу, определяющие угол между плоскастями:

$$\cos\psi=\frac{0\cdot1+1\cdot(-1)+2\cdot(-1)}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{-3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}\approx-0{,}77$$

Пример 8. Определить вид поверхности (сделать чертеж)

$$\text{a) } 9x^2-2y+z^2=18;\quad \text{b) } 4x^2-3y^2=12.$$

Решение: a) Представим уравнение в каноническом виде:

$$9x^2+z^2=2y+18,\quad 9x^2+z^2=2(y+9),\quad \frac{x^2}{\frac{2}{9}}+\frac{z^2}{2}=(y+9).$$

Это –уравнение эллиптического параболоида (Рис.2).

b) В данной уравнение $z=0$. То образующие данной поверхности будет цилиндрической поверхностью параллельной к оси Oz.

Из уравнения $4x^2-3y^2=12$ следует:

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1.$$

Это уравнения гиперболы. Таким образом данное уравнение, описывает гиперболическую поверхность (Рис.3).

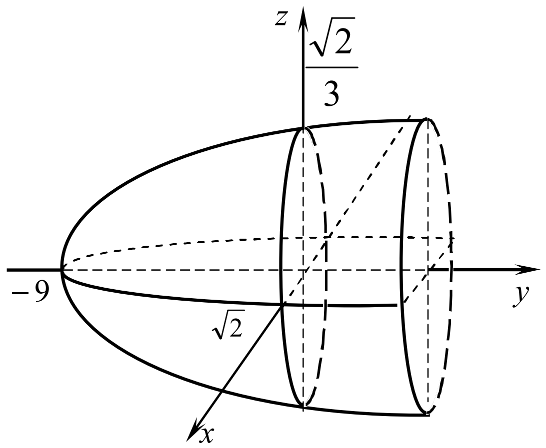


рис.2

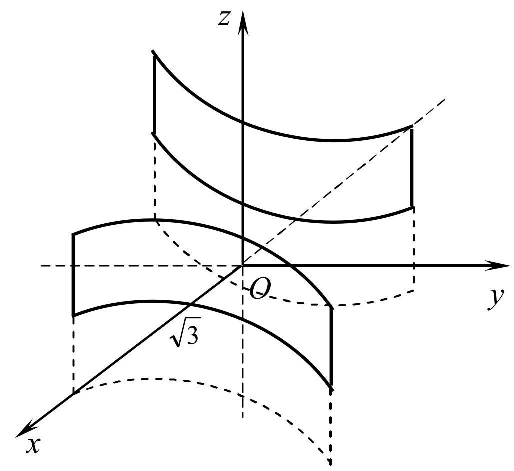


Рис.3.

ТЕМА 3. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Пример 9. Найти предел последовательностей.

a) $x_n = n^2\sqrt{n} - \sqrt{(n^3+1)(n^2-2)}$; b) $x_n = \dfrac{(n+2)!+2(n+1)!}{n!\cdot(1+5+9+\ldots+(4n-3))}$.

Решение. a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(n^2\sqrt{n} - \sqrt{(n^3+1)(n^2-2)}) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^5 - n^5 + 2n^3 - n^2 + 2}{n^2\sqrt{n} + \sqrt{(n^3+1)(n^2-2)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3 - n^2 + 2}{n^2\sqrt{n} + \sqrt{(n^3+1)(n^2-2)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}}{\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}\right)}} = \frac{2-0+0}{0+\sqrt{(1+0)(0-0)}} = \infty.$$

b) $x_n = \dfrac{(n+2)!+2(n+1)!}{n!\cdot(1+5+9+\cdots+(4n-3))} = \dfrac{n!\cdot(n+1)(n+2+2)}{n!\cdot\left(\dfrac{1+4n-3}{2}\right)\cdot n} = \dfrac{(n+1)(n+4)}{n(2n-1)}$.

Откуда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+4)}{n(2n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)}{2-\frac{1}{n}} = \frac{(1+0)(1+0)}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

Пример 10. Найти пределы функции:

а) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2 - x - 30}{x^3 + 125}$; б) $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x} - 3}{\sqrt[3]{x} + 2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot tg3x}{\cos x - \cos^3 x}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x+2)(\ln(2x+3) - \ln(2x-1))$.

Решение.

а) $$\lim_{x\to -5} \frac{x^2 - x - 30}{x^3 + 125} = \lim_{x\to -5} \frac{(x+5)(x-6)}{(x+5)(x^2 - 5x + 25)} = \lim_{x\to -5} \frac{x-6}{x^2 - 5x + 25} = -\frac{11}{75}.$$

б) $$\lim_{x\to -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{\sqrt[3]{x} + 2} = \lim_{x\to -8} \frac{(\sqrt{1-x} - 3)(\sqrt{1-x} + 3)}{(\sqrt[3]{x} + 2)(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4)} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt{1-x} + 3} =$$

$$= \lim_{x\to -8} \frac{-(x+8)}{(x+8)} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt{1-x} + 3} = -\lim_{x\to -8} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt{1-x} + 3} = -\frac{(-2)^2 - 2\cdot(-2) + 4}{3+3} = -2.$$

в) $$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin 3x}{\cos 3x \cos x(1 - \cos^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin 3x}{\cos 3x \cos x \sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 3x \cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \cdot \dfrac{\sin 3x}{3x}}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot x^2} = 1 \cdot 3 \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2} = 3 \cdot \frac{1}{1} = 3.$$

г) $$\lim_{x\to\infty} (x+2)(\ln(2x+3) - \ln(2x-1)) = \lim_{x\to\infty} (x+2)\ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty} \ln\left[\left(1 + \frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right]^{\left(\frac{4}{2x-1}\right)(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \ln e^{\frac{4x+8}{2x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x+8}{2x-1} = 2.$$

Пример 11. Исследовать на непрерывность и построить график функции.

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & -\infty < x \le -2, \\ (x+1)^2, & -2 < x \le 1, \\ 4 - x^3, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Решение: Функция определена на всем множестве действительных чисел, задана тремя выражениями на различных промежутках изменения аргумента: $(-\infty;-2)$, $(-2;1)$, $(1;+\infty)$. Проферка непрерывности функции сводится к проверкеопределения непрерывности в точках $x = -2$ и $x = 1$..

В точке $x = -2$:

$$f(-2-0) = \lim_{x\to -2-0} (x+3) = 1, \quad f(-2+0) = \lim_{x\to -2+0} (x+1)^2 = 1, \quad f(-2) = -2 + 3 = 1.$$

следует $f(-2-0) = f(-2+0) = f(-2)$.

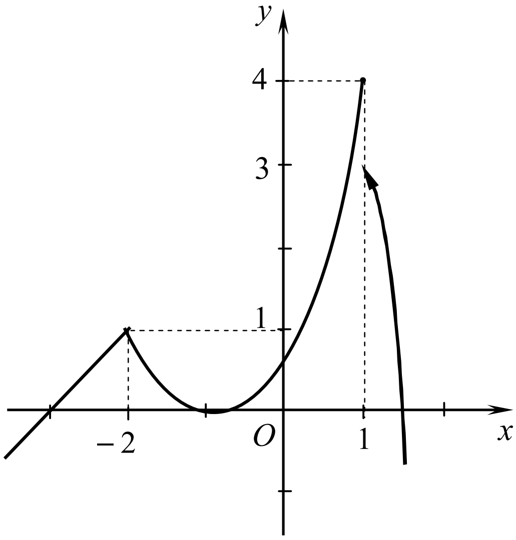
Итак, в точке $x = -2$ функция непрывна.

В точке $x=1$:

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x+1)^2=4=A_1,\quad f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}(4-x^3)=3=A_2.$

Значит, $x=1$ точка разрыва и в этой точке функция имеет разрыв 1-го рода со скачком

$\mu=\left|A_2-A_1\right|=|3-4|=1$ (Рис.4).



4-shakl.

Пример 12. Найти и классифицировать точки разрыва функции.

$f(x)=5^{\frac{3}{x+4}};\quad x_1=-4,\quad x_2=-3.$

Решение: Функция $f(x)$ элементарная, значит, она непрерывна в любой точке из области определения. В точке $x_2=-3$ эта функция определена, значит, она непрерывна.

В точке $x_1=-4$ функция не определена, поэтому она разрывна. Установим характер разрыва.Найдем

$f(-4-0)=\lim\limits_{x\to -4-0}5^{\frac{3}{x+4}}=0,\quad f(-4+0)=\lim\limits_{x\to -4+0}5^{\frac{3}{x+4}}=+\infty.$

Итак, точка $x_1=4$ есть точка разрыва второго рода.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Пример 1. Вычислить определитель: а) разложив его по элементам i-й строки; б) разложив его по элементам j- го столбца; в) получив предварительно нули в j-й строке.

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}, i=1, j=2.$ **1.2.** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix},\ i=3,\ j=2.$

1.3. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix},\quad i=3,\quad j=4.$ **1.4.** $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}, i=2,\ j=2.$

1.5. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=3,\quad j=1.$ **1.6.** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $i=2,\quad j=4.$

1.8. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1,\quad j=4.$ **1.9.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -4 & 3 \end{vmatrix}$, $i=2,\quad j=4.$

1.10. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, $i=4,\quad j=3.$ **1.11.** $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4,\quad j=2.$

1.12. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & -4 \end{vmatrix}$, $i=3,\quad j=4.$ **1.13.** $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1,\quad j=2.$

1.14. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$, $i=2,\quad j=3.$ **1.15.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, $i=3,\quad j=1.$

1.16. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, $i=1,\quad j=3.$ **1.17.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $i=3,\quad j=2.$

1.18. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, $i=2,\quad j=4$ **1.19.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$, $i=1,\quad j=2$

1.20. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 10 & 4 \\ 5 & 7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$, $i=2, j=3$. **1.21.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4, j=3$.

1.22. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=1$. **1.23.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=3$.

1.24. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=4$. **1.25.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=2$.

1.25. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=3$.

Пример 2. Даны матрицы $A,\ B$ и числа $\alpha,\ \beta$. Найти матрицы $\alpha A+\beta B$, AB, A^{-1} .

2.1. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\quad \alpha=-1,\ \beta=4$.

2.2. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad \alpha=-3, \beta=5$.

2.3. $A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix},\quad \alpha=5,\ \beta=-1$.

2.4. $A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix},\quad \alpha=-3,\ \beta=1$.

2.5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $\alpha=-1,\ \beta=-3$.

2.6. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}$, $\alpha=1,\ \beta=1$.

2.7. $A=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 4 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 7\end{pmatrix}$, $\alpha=1,\ \beta=3$.

2.8. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -4\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 0 & 6 & 2\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix}$, $\alpha=2,\ \ \beta=-2$.

2.9. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & 5 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\alpha=-5,\ \beta=1$.

2.10. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 7\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $\alpha=-1,\ \ \beta=4$.

2.11. $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ -4 & 9 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 1 & 9 & 2\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $\alpha=-3,\ \ \beta=-2$.

2.12. $A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ -4 & 0 & 5\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$, $\alpha=1,\ \ \beta=2$.

2.13. $A=\begin{pmatrix}6 & 9 & 4\\ -1 & -1 & 1\\ 10 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 3\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $\alpha=5,\ \ \beta=2$.

2.14. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\ -3 & 0 & 1\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}$, $\alpha=-5,\ \ \beta=-2$.

2.15. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 5\\ 7 & 1 & 2\\ 1 & 6 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=-2,\ \beta=-2$.

2.16. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$, $\alpha=-1,\ \beta=-2$.

2. 17. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 8 & -7 & -6\\ -3 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 3 & -5 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\alpha=1,\ \beta=2$.

2.18. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}$, $\alpha=2,\ \beta=5$.

2.19. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ -2 & 3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 0 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\alpha=1,\ \beta=3$.

2.20. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -3\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 5 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\alpha=4,\ \beta=5$.

2.21. $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 3\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & -5\\ -3 & -1 & 0\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $\alpha=3,\ \beta=2$.

2.22. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 1\\ 4 & -4 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -2\\ 1 & -6 & 3\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $\alpha=2,\ \beta=-3$.

2.23. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 4 & -9 & 3\\ 2 & -7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -4\\ 5 & -6 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$, $\alpha=-5,\ \beta=1$.

2.24. $A=\begin{pmatrix}8 & 5 & -1\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -7 & -6\\ 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\alpha=-1,\ \beta=-2$.

2.25. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\beta=5$.

Пример 3. Проверить совместность системы уравнений по теореме Кроникерра –Капелли и решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

3.1. $\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3=1,\\ x_1+3x_2+2x_3=7,\\ 2x_1+x_2+3x_3=6.\end{cases}$

3.2. $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=3,\\ x_1+x_2+2x_3=-4,\\ 4x_1+x_2+4x_3=-3.\end{cases}$

3.3. $\begin{cases}3x_1+x_2-2x_3=6,\\ 5x_1-3x_2+2x_3=-4,\\ 4x_1-2x_2-3x_3=-2.\end{cases}$

3.4. $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=-11,\\ 5x_1+x_2+2x_3=8,\\ x_1+2x_2+4x_3=16.\end{cases}$

3.5. $\begin{cases}x_1-3x_2-x_3=1,\\ 2x_1+x_2+x_3=-7,\\ 2x_1-x_2-3x_3=5.\end{cases}$

3.6. $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=8,\\ 4x_1-3x_2-2x_3=-1,\\ 2x_1-x_2+3x_3=1.\end{cases}$

3.7. $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=2,\\ x_1-x_2+3x_3=-4,\\ 3x_1+5x_2+x_3=4.\end{cases}$

3.8. $\begin{cases}4x_1+2x_2-3x_3=-2,\\ x_1+x_2+2x_3=5,\\ 3x_1+2x_2-2x_3=-1.\end{cases}$

3.9. $\begin{cases}2x_1-x_2+5x_3=27,\\ 5x_1+2x_2+13x_3=70,\\ 3x_1-x_3=-2.\end{cases}$

3.10. $\begin{cases}4x_1+x_2-3x_3=-6,\\ 8x_1+3x_2-6x_3=-15,\\ x_1+x_2-x_3=-4.\end{cases}$

3.11. $\begin{cases}x_1+3x_2-x_3=0,\\ 4x_1-5x_2+x_3=7,\\ 3x_1-x_2+4x_3=-4.\end{cases}$

3.12. $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1,\\ 3x_1+2x_2-2x_3=1,\\ x_1-3x_2+4x_3=3.\end{cases}$

3.13. $\begin{cases}4x_1-7x_2=1,\\ 2x_1+x_2-3x_3=-1,\\ 3x_1+5x_3=16.\end{cases}$

3.14. $\begin{cases}5x_1+7x_2-x_3=1,\\ x_1+7x_3=6,\\ 2x_1-4x_2+5x_3=-1.\end{cases}$

3.15. $\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=6,\\ x_1+3x_2+2x_3=9,\\ 4x_1-5x_2+x_3=5.\end{cases}$

3.16. $\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3=11,\\ 4x_1+8x_3=-4,\\ 5x_1-6x_2=21.\end{cases}$

3.17. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 = 3, \\ 2x_1 - 5x_3 = -12. \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -11, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 7x_3 = 16. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 10, \\ 2x_1 + 6x_2 = 38, \\ 3x_1 - 7x_3 = 5. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 10, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12. \end{cases}$

Пример 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

4.1. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 11x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4. 4. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

4. 6. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 10x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

4. 7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

4. 8. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

4. 9. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

4. 10. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

4. 11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

4. 12. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 13x_3 = 0. \end{cases}$

4. 13. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 14x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$

4. 14. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

4. 15. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$

4 .16. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4. 17. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 14x_3 = 0. \end{cases}$

4. 18. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

4. 19. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

4. 20. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 14x_3 = 0. \end{cases}$

4. 21. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4. 22. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 = 0. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 11x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4. 24. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4. 25. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 10x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

Пример 5. Даны координаты вершины треугольника ABC: а) составить уравнения высоты, проходящей через вершину C и найти ее длины; б) Составить уравнения медианы, проходящей через вершину B и найти точки пересечения медиан; с) найти угол A и составить уравнения биссектрисы угла A.

5.1. $A(1;2)$, $B(9;8)$, $C(6;14)$.

5.2. $A(2;-3)$, $B(-3;9)$, $C(6;0)$.

5.3 $A(-1;-2)$, $B(7;4)$, $C(4;10)$.

5.4. $A(1;-1)$, $B(9;5)$, $C(6;11)$.

5.5. $A(1;-4)$, $B(-4;8)$, $C(5;-1)$.

5.6. $A(-1;1)$, $B(7;7)$, $C(4;13)$.

5.7. $A(5;-2)$, $B(8;2)$, $C(-7;3)$.

5.8. $A(2;-4)$, $B(14;1)$, $C(-2;-1)$.

5.9. $A(6;0)$, $B(9;4)$, $C(-6;5)$.

5.10. $A(8;2)$, $B(-4;7)$, $C(14;10)$.

5.11. $A(-1;-6)$, $B(-6;6)$, $C(3;-3)$.

5.12. $A(4;-1)$, $B(7;-5)$, $C(-8;4)$.

5.13. $A(12;0)$, $B(0;5)$, $C(18;8)$.

5.14. $A(1;-2)$, $B(-11;3)$, $C(7;6)$.

5.15. $A(3;4)$, $B(15;9)$, $C(-1;7)$.

5.16. $A(-1;2)$, $B(7;8)$, $C(4;14)$.

5.17. $A(1;1)$, $B(9;7)$, $C(6;13)$.

5.18. $A(14;-6)$, $B(26;-1)$, $C(20;2)$.

5.19. $A(2;-1)$, $B(10;5)$, $C(7;11)$.

5.20. $A(5;-3)$, $B(17;2)$, $C(1;0)$.

5.21. $A(-2;1)$, $B(6;7)$, $C(3;13)$.

5.22. $A(2;-1)$, $B(-10;4)$, $C(8;7)$.

5.23. $A(-1;-1)$, $B(7;5)$, $C(4;11)$.

5.24. $A(-2;-6)$, $B(10;-1)$, $C(-6;-3)$.

5.25. $A(3;-7)$, $B(-2;5)$, $C(7;-4)$.

Пример 6. ***1.*** Найти уравнение геометрического места точек $M(x;y)$, отношение расстояний которых от точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ равной на a.

2. Найти уравнение геометрического места точек $M(x;y)$, отношение расстояний которых от точки $A(x_1;y_1)$ до прямой $x=b$, равным на m.

6.1. $A(4;1)$, $B(-2;-1)$, $a=4$.

6.2. $A(5;7)$, $B(-2;1)$, $a=4$.

6.3. $A(-3;3)$, $B(5;1)$, $a=\dfrac{1}{3}$.

6.4. $A(2;-4)$, $B(3;5)$, $a=\dfrac{2}{3}$.

6.5. $A(1;6)$, $B(4;-2)$, $a=2$.

6.6. $A(3;-2)$, $B(4;6)$, $a=\dfrac{3}{5}$.

6.7. $A(6;0)$, $B(0;-3)$, $a=2$.

6.8. $A(-4;0)$, $B(0;0)$, $a=3$.

6.9. $A(4;-2)$, $B(1;6)$, $a=2$.

6.10. $A(2;1)$, $B(-2;2)$, $a=4$.

6.11. $A(-3;3)$, $B(5;1)$, $a=3$.

6.12. $A(6;1)$, $x=-5$, $m=\dfrac{1}{3}$.

6.13. $A(-1;2)$, $x=9$, $m=\frac{1}{4}$.

6.14. $A(1;0)$, $x=8$, $m=\frac{1}{5}$.

6.15. $A(0;5)$, $x=3$, $m=\frac{1}{2}$.

6.16. $A(2;1)$, $x=-5$, $m=3$.

6.17. $A(-3;4)$, $x=3$, $m=3$.

6.18. $A(2;0)$, $x=-\frac{5}{2}$, $m=\frac{4}{5}$.

6.19. $A(2;0)$, $x=-\frac{8}{5}$, $m=\frac{5}{4}$.

6.20. $A(-1;0)$, $x=-4$, $m=\frac{1}{2}$.

6.21. $A(4;0)$, $x=-2$, $m=\frac{1}{2}$.

6.22. $A(3;0)$, $x=\frac{9}{2}$, $m=\frac{2}{3}$.

6.23. $A(1;3)$, $x=-6$, $m=\frac{1}{2}$.

6.24. $A(1;5)$, $x=-1$, $m=\frac{1}{4}$.

6.25. $A(3;0)$, $B(-6;0)$, $a=\frac{1}{2}$.

. ***Пример 7.*** Даны вершины пирамиды $ABCD$. Найти: уравнения ребра AB; б) уравнения грани ABC; с) уравнения и длину высоты, опущенной из D на ABC; в) уравнение прямой, проходящей через C параллельной AB; г) уравнения плоскости проходящей через D перпендикулярной AB; д) синус угла между ребром AD и грани ABC; е) косинус угла между гранями ABC и ABD.

7.1. $A(3;5;3)$, $B(8;7;4)$, $C(5;10;4)$, $D(4;7;8)$.

7.2. $A(6;6;5)$, $B(4;9;5)$, $C(4;6;11)$, $D(6;9;3)$.

7.3. $A(3;2;2)$, $B(5;-3;2)$, $C(5;-3;-1)$, $D(2;-3;7)$.

7.4. $A(0;4;5)$, $B(3;-2;1)$, $C(-4;5;6)$, $D(3;3;-2)$.

7.5. $A(1;-1;3)$, $B(6;5;8)$, $C(3;5;8)$, $D(8;4;1)$.

7.6. $A(1;-2;7)$, $B(4;2;10)$, $C(2;-3;5)$, $D(5;3;7)$.

7.7. $A(4;2;7)$, $B(1;2;0)$, $C(3;5;7)$, $D(2;-3;5)$.

7.8. $A(2;3;5)$, $B(5;3;-7)$, $C(1;2;7)$, $D(5;2;0)$.

7.9. $A(5;3;7)$, $B(-2;3;5)$, $C(4;2;7)$, $D(1;-2;7)$.

7.10. $A(3;1;4)$, $B(-1;6;1)$, $C(-1;1;6)$, $D(0;4;-1)$.

7.11. $A(3;-1;2)$, $B(-1;0;1)$, $C(1;7;3)$, $D(9;5;8)$.

7.12. $A(3;5;4)$, $B(5;8;4)$, $C(1;2;-2)$, $D(-1;3;2)$.

7.13. $A(2;4;3)$, $B(1;1;5)$, $C(4;9;3)$, $D(-3;6;7)$.

7.14. $A(9;5;5)$, $B(-3;7;1)$, $C(5;7;8)$, $D(6;0;2)$.

7.15. $A(2;9;6)$, $B(2;8;2)$, $C(9;8;6)$, $D(7;9;3)$.

7.16. $A(2;5;-1)$, $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z}{-1}$.

7.17. $A(1;8;6)$, $B(5;2;2)$, $C(5;7;6)$, $D(4;8;-1)$.

7.18. $A(0;7;1)$, $B(2;-1;5)$, $C(1;6;3)$, $D(3;-9;-8)$.

7.19. $A(5;5;4)$, $B(1;-1;4)$, $C(3;5;1)$, $D(5;8;-3)$.

7.20. $A(6;1;1)$, $B(1;6;6)$, $C(4;2;0)$, $D(1;2;6)$.

7.21. $A(7;5;3)$, $B(9;4;4)$, $C(4;5;7)$, $D(7;9;6)$.

7.22. $A(6;8;2)$, $B(5;4;7)$, $C(2;8;2)$, $D(7;3;7)$.

7.23. $A(4;2;5)$, $B(0;6;1)$, $C(0;2;7)$, $D(1;4;0)$.

7.24. $A(4;4;9)$, $B(7;10;3)$, $C(2;8;4)$, $D(9;6;9)$.

7.25. $A(4;6;5)$, $B(6;9;4)$, $C(2;3;5)$, $D(7;5;9)$.

Пример 8. Определить вид поверхности (сделать чертеж).

8.1. a) $5x^2+y^2-3z^2=0$; b) $z^2=2y^2+4$.

8.2. a) $x^2+4z^2+6y=0$; b) $4x^2+3z^2=12$.

8.3. a) $8x^2-y^2+4z^2+32=0$; b) $3y^2+2z^2=6$.

8.4. a) $6x^2+5y^2-10z^2-30=0$; b) $5x^2-4z^2=6$.

8.5. a) $2x^2+6y^2=3z$; b) $3x^2+6z^2=18$.

8.6. a) $2x^2-3y^2-5z^2+30=0$; b) $3z^2-2x=6$.

8.7. a) $x^2-6y^2+z^2-124=0$; b) $2x^2-3z^2=6$.

8.8. a) $3z^2+9y^2-x=0$; b) $3x^2+5z^2=15$.

8.9. a) $y-4z^2=3x^2$; b) $x^2-4z^2=4$.

8.10. a) $3x^2+5y^2-4z=0$; b) $5x^2+4z^2=20$.

8.11. a) $9x^2+12y^2+4z^2-72=0$; b) $4x^2-3y^2=12$.

8.12. a) $10x^2-9y^2-15z^2-9=0$; b) $y^2=2z^2+z$.

8.13. a) $6z^2-3y^2-2x^2-18=0$; b) $4y^2-5z^2=20$.

8.14. a) $3x^2-9y^2+z^2+27=0;$ b) $x^2-4z^2=10.$

8.15. a) $4x^2+z^2-2y=0;$ b) $y^2=x+3$.

8.16. a) $2y^2+6z=3x^2$; b) $z^2=x-4.$

8.17. a) $4x^2-12y^2+3z^2-24=0;$ b) $3x^2+z^2=30$.

8.18. a) $2x^2+4y^2-5z^2=0;$ b) $7x^2-5z^2=35.$

8.19. a) $7x^2+2y^2+6z^2-42=0;$ b) $x^2+4z^2=4$.

8.20. a) $4x^2+9y^2-36z^2=0$; b) $2y^2-3x=12$.

8.21. a) $4x^2+4y^2+5z^2-20=0$; b) $9x^2+4y^2=36$.

8.22. a) $5x^2+5y^2-6z^2-30=0$; b) $z^2=4y^2-3$.

8.23. a) $4x^2-3y^2+2z^2-24=0$; b) $x^2-y^2=2y$.

8.24. a) $8x^2-y^2-2z^2-32=0;$ b) $2x^2+3z^2=6-12z$.

8.25. a) $2x^2-2y^2-5z^2-10=0$; b) $x^2+2x=z^2+1$.

Пример 9. Найти предел последовательностей.

9.1. a) $x_n=\sqrt{n^2-5n+6}-n;$ b) $x_n=\dfrac{(n+2)!+(n+3)!}{(n+4)!}.$

9.3. a) $x_n=\sqrt{n^2-2n+6}-\sqrt{n^2+2n-6};$ b) $x_n=\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{\sqrt{2n^2+n-2}}.$

9.4. a) $x_n=\sqrt[3]{5+8n^3}-2n$; b) $x_n=\dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n).$

9.5. a) $x_n=\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2};$ b) $x_n=\dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{n+5}-n.$

9.6. a) $x_n=n-\sqrt{n(n-1)};$ b) $x_n=\dfrac{5}{6}+\dfrac{13}{36}+\cdots+\dfrac{2^n+3^n}{6^n}.$

9.7. a) $x_n = n\cdot(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n)$; b) $x_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt[3]{n^6+n}}$.

9.8. a) $x_n = n-\sqrt[3]{n^3-3}$; b) $x_n = \dfrac{2-5+4-7+\cdots+2n-(2n+3)}{n+5}$.

9.9. a) $x_n = \sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2})$; b) $x_n = \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$.

9.10. a) $x_n = \sqrt{n+2}\cdot(\sqrt{n+4}-\sqrt{n-3})$; b) $x_n = \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

9.11. a) $x_n = \sqrt[3]{n^2-n^3}+n$; b) $x_n = \dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

9.12. a) $x_n = n-\sqrt{(n-2)(n+3)}$; b) $x_n = \dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

9.13. a) $x_n = \sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}$; b) $x_n = \dfrac{1}{1\cdot 7}+\dfrac{1}{3\cdot 9}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}$.

9.14. a) $x_n = n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+2)(n+3)}$; b) $x_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{8n^2-1}}$.

9.15. a) $x_n = \sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}$; b) $x_n = \dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$.

9.16. a) $x_n = n^2\cdot(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3})$; b) $x_n = \dfrac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{2+n^2}}$.

9.17. a) $x_n = \sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-2)^2}$; b) $x_n = \dfrac{3-n^2+2\sqrt{n}}{2+7+12+\cdots+(5n-3)}$.

9.18. a) $x_n = n^2-\sqrt{n^4+n^2+1}$; b) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{3-n^3}+n^2}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$.

9.19. a) $x_n = \sqrt{n^2-n+2}-\sqrt{n^2+n-1}$; b) $x_n = \dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

9.20. a) $x_n = \sqrt{n^4-2}-\sqrt{n^4+3}$; b) $x_n = \dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{3n!(n+1)}$.

9.21. a) $x_n = \sqrt{n^2+4}-\sqrt{n+n^2}$; b) $x_n = \dfrac{3n+1}{3}-\dfrac{2+5+8+\cdots+(3n-1)}{2n+3}$.

9.22. a) $x_n = \sqrt{n^4 + 3n^2 + 1} - n^2$; b) $x_n = \dfrac{1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)}{\sqrt{n^4 - n^2 - 1}}$.

9.23. a) $x_n = \sqrt[3]{n} \cdot (\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)})$; b) $x_n = \dfrac{3 + 5 + 7 + \cdots + (2n+3)}{n\sqrt{n^2 - 1}}$.

9.24. a) $x_n = \sqrt{n^3 + 8} \cdot (\sqrt[3]{n^3 + 2} - \sqrt[3]{n^2 - 1})$; b) $x_n = \dfrac{5^n - 2^n}{5^{n-1} + 2^n}$.

9.25. a) $x_n = 2n - \sqrt[3]{3 + 8n^3}$; b) $x_n = \dfrac{7}{10} + \dfrac{29}{100} + \dfrac{133}{1000} + \cdots + \dfrac{5^n + 2^n}{10^n}$.

Пример 10. Найти пределы функции.

10.1. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x^2 - 6x - 45}{2x^2 - 3x - 35}$. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos^2 x}{5x^2}$. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x - 1}{2x + 3} \right)^{2x-1}$.

10.2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4x - 5}$. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt{3 + 2x} - \sqrt{x + 4}}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{4x^2}$. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + 5}{x + 9} \right)^{-4x}$.

10.3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 11x + 18}$. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x^3 - 8}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, 4x}{3 \sin 5x}$. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2 - 3x}{5 - 3x} \right)^{2x}$.

10.4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - x^2 - 2}{2x^4 - x - 1}$. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{3x} - x}{x^3 - 27}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, 2x - \sin 2x}{3x^2}$. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + 5}{x - 7} \right)^{2x+3}$.

10.5. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4}$. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x + 1} - 5}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{x \cdot \sin x}$. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{5x - 2}{5x + 1} \right)^{-x}$.

10.6. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 13x + 4}{x^2 - x - 12}$. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 3}{\sqrt{x - 1} - 2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x-\cos x}{1-\cos 3x}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)^{2x+3}.$$

10.7. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+4x^2-5}{x^3+2x^2-x-2}.$$

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{4x-1}.$$

10.8. $$\lim_{x\to 1}\frac{8x^4-6x^2-x-1}{x^3-3x^2+2}.$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{2-\sqrt[3]{x}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cdot tgx}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5-2x}{3-2x}\right)^{-x+3}.$$

10.9. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{3x^2-x-10}.$$

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{3x-2}}{x^2-10x+9}.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tgx}\right).$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)^{3x}.$$

10.10. $$\lim_{x\to -1}\frac{3x^3-2x+1}{4x^3+2x^2-x+1}.$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}{4x^2+3x-1}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{1-\cos 2x}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}.$$

10.11. $$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}.$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}.$$

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}.$$

10.12. $$\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}.$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2-x-21}{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\pi-2x}.$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2x-1}{4x+1}\right)^{2x-1}.$$

10.13. $$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-5x-14}{2x^2-19x+35}.$$

$$\lim_{x\to -4}\frac{4-\sqrt{x+20}}{x^3+64}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{4x-\pi}.$$

$$\lim_{x\to -1}(4x+5)^{\frac{3x}{x^2-1}}.$$

10.14. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{7+x}}{x^2+4x-5}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{tg3x}$. $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x^2-1}}$.

10.15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\arcsin x}$. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)[\ln(x+2)-\ln x]$.

10.16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{4x+5}}{3x^2+4x-7}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{3x^2}$. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$.

10.17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2-x^2+x-1}$. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{9-2x}}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\cdot arctgx}$. $\lim\limits_{x\to -\infty}(2x-1)[\ln(1-3x)-\ln(2-3x)]$.

10.18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{1-tgx}$. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x-1}$.

10.19. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{x^2-8x+15}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\cdot\arcsin x}$. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$.

10.20. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{5x+9}-7}{2-\sqrt[3]{x}}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2}$. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{4+3x}{5+x}\right)^{6x}$.

10.21 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{\sqrt{2x+13}-\sqrt{7+x}}{x^2+5x-6}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg4x}{arctg2x}$. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$.

10.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{4-\sqrt{x}}$.

$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\pi^2-x^2}{1-\cos^2 x}$. $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{3x}{x+1}}$.

10.23. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{2x^2+5x-3}$. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{8-x}-\sqrt{4-5x}}$.

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{1-ctgx}$. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x^2}{x^2-4}}$.

10.24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{3x+11}-\sqrt{1-2x}}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x-\sin x}$. $\lim\limits_{x\to \infty}(3x+1)[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)]$.

10.25. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x^4-x^2+x+1}$. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+3x-9}{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x\cdot\sin 2x}$. $\lim\limits_{x\to -2}(4x+9)^{\frac{5x}{2+x}}$.

Пример 11. Исследовать на непрерывность и построить график функции

11.1. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 0, & 0<x\le 2,\\ x-2, & x>2.\end{cases}$ **11.2.** $f(x)=\begin{cases}x-3, & x<0,\\ x+1, & 0\le x\le 3,\\ 7-x, & x>3.\end{cases}$

11.3. $f(x)=\begin{cases}x+4, & x<-1,\\ x^2+2, & -1\le x<1,\\ 3x, & x\ge 1.\end{cases}$ **11.4.** $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0,\\ 0, & 0<x\le 2,\\ 2-x, & x>2.\end{cases}$

11.5. $f(x)=\begin{cases}-2(x+1), & x\le -1,\\ x^2, & -1<x\le 3,\\ x-1, & x>3.\end{cases}$ **11.6.** $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^3, & 0<x\le 1,\\ x+1, & x>1.\end{cases}$

11.7. $f(x)=\begin{cases}x, & x\le -2,\\ -x+1, & -2<x\le 1,\\ x^2-1, & x>1.\end{cases}$ **11.8.** $f(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ \cos x, & 0\le x\le \pi,\\ 1-x, & x>\pi.\end{cases}$

11.9. $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0,\\ -x^2+4, & 0<x<2,\\ x-2, & x\ge 2.\end{cases}$ **11.10.** $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x<\pi,\\ 3, & x\ge \pi.\end{cases}$

11.11. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ -(x-1)^2, & 0<x<2, \\ x-2, & x\ge 2. \end{cases}$

11.12. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1, \\ 2x, & 1<x<3, \\ x+3, & x\ge 3. \end{cases}$

11.13. $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le -1, \\ x-1, & -1<x\le 3, \\ -x+5, & x>3. \end{cases}$

11.14. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi, \\ 2-x, & x\ge \pi. \end{cases}$

11.15. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1, \\ x^2+1, & -1<x\le 1, \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

11.16. $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le 0, \\ (x-1)^2, & 0<x\le 3, \\ x+1, & x>3. \end{cases}$

11.17. $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x\le -1, \\ x^2, & -1<x\le 3, \\ x^2-1, & x>3. \end{cases}$

11.18. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ x^2, & 0<x\le 1, \\ x+1, & x>1. \end{cases}$

11.19. $f(x)=\begin{cases} x, & x\le -2, \\ -x+1, & -2<x\le 1, \\ x^2-1, & x>1. \end{cases}$

11.20. $f(x)=\begin{cases} 1, & x<0, \\ \sin x, & 0\le x\le \pi, \\ 1+x, & x>\pi. \end{cases}$

11.21. $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & x\le 0, \\ -x^2+4, & 0<x<2, \\ x-2, & x\ge 2. \end{cases}$

11.22. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0, \\ \cos x, & 0<x<\pi, \\ 4, & x\ge \pi. \end{cases}$

11.23. $f(x)=\begin{cases} 1-2x, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\le x<1, \\ 4x, & x\ge 1. \end{cases}$

11.24. $f(x)=\begin{cases} 3x, & x\le 0, \\ 0, & 0<x\le 2, \\ x^2-2x-x, & x>2. \end{cases}$

11.25. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le -1, \\ x-1, & -1<x\le 3, \\ -2x+8, & x>3. \end{cases}$

Пример 12. Найти и к классифицировать точки разрыва функции

12.1. $f(x)=\dfrac{x-5}{x-2};\quad x_1=3,\quad x_2=2.$

12.2. $f(x)=2^{\frac{1}{x-4}};\quad x_1=4,\quad x_2=5.$

12.3. $f(x)=\dfrac{4x}{x+5};\quad x_1=3,\quad x_2=-5.$

12.4. $f(x)=3^{\frac{2}{x+2}};\quad x_1=-1,\quad x_2=-2.$

12.5. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1};\quad x_1=1,\quad x_2=2.$

12.6. $f(x)=7^{\frac{4}{x-3}};\quad x_1=2,\quad x_2=4.$

12.7. $f(x)=4^{\frac{x}{1-x}};\quad x_1=1,\quad x_2=2.$

12.8. $f(x)=\dfrac{3x}{4-x^2};\quad x_1=2,\quad x_2=3.$

12.9. $f(x)=5^{\frac{1}{x-3}};\quad x_1=3,\quad x_2=4.$

12.10. $f(x)=6^{\frac{1}{3+x}};\quad x_1=-2,\quad x_2=-3.$

12.11. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-2};\quad x_1=2,\quad x_2=3.$

12.12. $f(x)=8^{\frac{4}{x+2}};\quad x_1=-3,\quad x_2=-2.$

12.13. $f(x)=\dfrac{x}{x^3+8};\quad x_1=-2,\quad x_2=-1.$

12.14. $f(x)=5^{\frac{3}{x+4}};\quad x_1=-4,\quad x_2=-3.$

12.15. $f(x)=\dfrac{3x}{x-5};\quad x_1=3,\quad x_2=5.$

12.16. $f(x)=6^{\frac{2}{x+1}};\quad x_1=-1,\quad x_2=-2.$

12.17. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4};\quad x_1=1,\quad x_2=2.$

12.18. $f(x)=5^{\frac{4}{x-3}};\quad x_1=2,\quad x_2=5.$

12.19. $f(x)=4^{\frac{x}{1-x}};\quad x_1=1,\quad x_2=2.$

12.20. $f(x)=\dfrac{3x}{4-x^2};\quad x_1=2,\quad x_2=3.$

12.21. $f(x)=4^{\frac{1}{x-4}};\quad x_1=3,\quad x_2=4.$

12.22. $f(x)=5^{\frac{1}{5+x}};\quad x_1=-5,\quad x_2=-3.$

12.23. $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-1};\quad x_1=1,\quad x_2=3.$

12.24. $f(x)=7^{\frac{4}{x+2}};\quad x_1=-4,\quad x_2=-2.$

12.25. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2};\quad x_1=-3,\quad x_2=-2.$