МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ АРХИТЕКТУРНО СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения

ЧАСТЬ 2

Tashkent-2019

Методическое пособие одобрено методическим Советом Ташкентского архитектурно строительного института (протокол №1, 28.09.18)

Авторы:
кандидат технических наук, доцент Ш. Р. Хуррамов;
кандидат физико-математических наук, доцент А.Абдурахимов;
старший преподаватель Ф.С. Холтураев;
ассистент Н.У.Аннаев

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, А.Бойтураев (НУУз);
доктор физико-математических наук, А.Заитов (ТАСИ)

Высшая математика: Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения, Часть 2 / Хуррамов Ш. Р., Абдурахимов А., Холтураев Ф.С., Аннаев Н.У.–Ташкент: 2019. – 38 с.

Методическое пособие предназначена для студентов заочной формы обучения направления: 5340200- Строительство зданий и сооружений (по видам), 5340300 –Городское строительство и хозяйство, 5340400 - Строительство и монтаж инженерных коммуникаций (по видам), 5340500- Производство строительных материалов, изделий и конструкций, 340700-Гидротехнтческое строительство (по видам), 5341100- Стоимостьной инжиниринг, 5311500 -Геодезия, картография и кадастр.

Пособие содержит варианты для контрольных работ по разделам курса высшей математики «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Интегральное исчисление функций одной переменной» и «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Для каждой контрольной работы приведены решения типичных задач с подробными пояснениями и примерное их оформление.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие учебно-методические материалы предназначены для студентов заочной формы обучения и являются руководством для изучения дисциплины “Высшая математика”. Они содержат в себе основные рекомендации студентам-заочникам при выполнении контрольных работ, а также методические указания по изучению разделов курса высшей математики «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Интегральное исчисление функций одной переменной» и «Обыкновенные дифференциальные уравнения», с решениями типичных примеров. В разобранных задачах приведено примерное их оформление с пояснениями.

В материалах приведены контрольные задания для двадцати пяти вариантов, которые разбиты на три раздела.

Данное методическое пособие является одним из составных частей организационно-методического обеспечения студентов заочного обучения кафедры математики и естественных наук для студентов инженерных специальностей

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТАМ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ ПРИ РАБОТЕ НАД КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТОЙ

1. В процессе изучения дисциплины студент-заочник должен выполнить контрольные работы по различным разделам высшей математики, которые рецензируются преподавателем. Рецензия на выполненную работу позволяет студенту судить о степени усвоения им материала курса, указывает на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление его дальнейшей работы и помогает сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.
2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточное количество задач по изучаемому материалу.
3. Каждая контрольная работа должна выполняться самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможность преподавателю - рецензенту указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к сдаче итогого контроля.
4. Контрольная работа должна быть прислана в срок (до сессии). Невыполнение этого требования не дает возможности рецензенту своевременно указать студенту на допущенные им ошибки и удлиняет срок рецензирования работы.

5. При выполнении и оформлении контрольной работы студент должен строго придерживаться следующих правил:

а) контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради с оставлением полей для замечаний преподавателя-рецензента;

б) на обложке тетради в заголовке указывается

- контрольная работа по высшей математике и её номер,
- фамилия и инициалы студента, номер зачетной книжки,
- факультет, курс и группа,
- дата отсылки работы в высшее учебное заведение и обратный адрес студента;

в) решение задач следует располагать в порядке следования их номеров;

г) перед началом самого решения задачи необходимо полностью записать ее условие, заменив, если необходимо, буквенные обозначения числовыми данными, соответствующими своему варианту;

д) все основные этапы решения задач следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями;

ж) в конце контрольной работы указывается используемая литература.

6. Студент выполняет вариант контрольных работ, соответствующей последным двум цифрам рейтинговой книжки. При этом, эти две цифры делятся на 25 и остаток означает номер варианта контрольной работы, который должен выполнят студент. Если последные две цифры рейтинговой книжки 75,50,25,00 , то студент выполняет вариант № 25.

7. После получения прорецензированной контрольной работы студент должен исправить отмеченные ошибки и предоставить ее на повторное рецензирование.

8. Без предъявления соответствующей прорецензированной и зачтенной контрольной работы студент не допускается к итоговыму контролью по предмету “Высшая математика”.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПО КУРСУ “ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА”

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной, ее геометрический и ханический смысл. Дифференцируемость функции. Дифференциал функции.

Дифференцирование суммы, разности, произведения и частного функций. Дифференцирование обратной функции. Дифференцирование сложной функции. Производные основных элементарных функций. Правилы дифференцирования и таблица производных. Логарифмическая производная.

Дифференциация параметрически и неявно заданных функций. Производные и дифференциалы высших порядков.

Теорема Ферма. Теорема Роляя. Теорема Лагранжа. Теорема Коши Теорема Лопиталя. Теорема Тейлора.

Условия монотонности функций. Экстремумы функций. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Вогнутость, выпуглость и точки перегиба графика функции. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования и построения графика функций.

Интегральное исчисление функций одной переменной

Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Методы интегрирования.

Интегрирование рациональных функций. Интегрирование рациональных дробей.

Интегрирование тригонометрических функций.

Интегрирование иррациональных выражений.

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Интегральная сумма и определенный интеграл. Геометрическое и механическое смыслы определенного интеграла. Свойства определенного интеграла.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Несобственные интегралы от неогранеченных функций. Признаки сходимости несобственных интегралов.

Геометрические и физические применения определенного интеграла.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Уравнения с разделящимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения Вернулли. Уравнения в польных дифференциалах.

Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Линейные однородные дифференциальные уравнения. Линейные однородные ифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков и второго порядка. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Дифференциальные уравнения с правой частью специального вида.

Нормальные системы дифференциальных уравнений. Методы решения нормальных систем. Системы линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Д.Т.Писменный. Конспект лекций по высшей математике: польный курс- М: Айрис-пресс, 2009.

2. А.П.Рябушко и др. Сборник задач индивидуальных заданий по высшей математике. Ч. 2– Минск, Высшая школа, 1991.

3. О.В Зимина, А.И.Кириллов, Т.А. Сальникова, Высшая математика. М.: Физматлит, 2001.

4 П.С. Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. Высая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. –М.: 2003.

5. К.Н.Лунгу, Е.В.Макаров. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч.1 – М.: Физматлит, 2007.

6. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. 1том. СПб. "Политехника", 2003.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

В данном разделе методических указаний приведены примеры решения типовых задач контрольных заданий. Решение задач приведено по темам, которые студент должен изучить в процессе выполнения контрольной работы. Решенные задачи содержат формулы и пояснения, которые могут быть использованы студентом, при выполнении заданий своего варианта. В то же время, тех теоретических сведений, которые приведены в задачах, недостаточно для сдачи итогого контроля по курсу «Высшая математика», они могут быть использованы лишь при решении практических задач и выполнении контрольной работы.

ТЕМА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пример 1. Найти производные функций:

1) $y=\sqrt[5]{3-7x-x^2}+\dfrac{4}{(x-7)^5}$; 2) $y=arctg^3 4x\cdot 3^{\sin x}$;

3) $y=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{\frac{x}{3}}}$; 4) $y=x^{3\sin x}$.

Решение. Найдем производные, пользуясь основными правилами фифференцирования и таблицу производных.

$$1)\ y' = \left(\sqrt[5]{3-7x-x^2}\right)' + \left(\frac{4}{(x-7)^5}\right)' = \left((3-7x-x^2)^{\frac{1}{5}}\right)' + \left(4(x-7)^{-5}\right)' =$$

$$= \frac{1}{5}(3-7x-x^2)^{-\frac{4}{5}}(3-7x-x^2)' + 4(-5)(x-7)^{-6}(x-7)' =$$

$$= \frac{1}{5\sqrt[5]{(3-7x-x^2)^4}} \cdot (-7-2x) - \frac{20}{(x-7)^6} \cdot 1 = -\frac{7+2x}{5\sqrt[5]{(3-7x-x^2)^4}} - \frac{20}{(x-7)^6}.$$

$$2)\ y' = (arctg^3 4x \cdot 3^{\sin x})' = (arctg 4x)' \cdot 3^{\sin x} + arctg^3 4x \cdot (3^{\sin x})' =$$

$$= 3arctg^2 4x (arctg 4x)' \cdot 3^{\sin x} + arctg^3 4x \cdot 3^{\sin x} \ln 3 \cdot (\sin x)' =$$

$$= 3arctg^2 4x \cdot \frac{1}{1+16x^2} \cdot (4x)' \cdot 3^{\sin x} + arctg^3 4x \cdot 3^{\sin x} \ln 3 \cdot \cos x =$$

$$= 3arctg^2 4x \cdot \frac{4}{1+16x^2} \cdot 3^{\sin x} + arctg^3 4x \cdot 3^{\sin x} \ln 3 \cdot \cos x =$$

$$= 3^{\sin x} arctg^2 4x \cdot \left(\frac{12}{1+16x^2} + \ln 3 \cdot arctg x \cdot \cos x\right).$$

$$3)\ y' = \left(\frac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{\frac{x}{3}}}\right)' = \frac{\left((2x^2-3x+1)^{\frac{1}{3}}\right)' e^{\frac{x}{3}} - (2x^2-3x+1)^{\frac{1}{3}}\left(e^{\frac{x}{3}}\right)'}{e^{\frac{2x}{3}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(2x^2-3x+1)^{-\frac{2}{3}}(2x^2-3x+1)' e^{\frac{x}{3}} - (2x^2-3x+1)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{x}{3}}\left(\frac{x}{3}\right)'}{e^{\frac{2x}{3}}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{3}}\left(\frac{4x-3}{3\sqrt[3]{(2x^2-2x+1)^2}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{2x^2-3x+1}\right)}{e^{\frac{2x}{3}}} =$$

$$= \frac{4x-3-2x^2+3x-1}{3e^{\frac{x}{3}}\sqrt[3]{(2x^2-3x+1)^2}} = \frac{-2x^2+7x-4}{3e^{\frac{x}{3}}\sqrt[3]{(2x^2-3x+1)^2}}.$$

4) Воспользуемся формулой логарифмического производного:

$$(u^v)' = u^v\left(v'\ln u + \frac{vu'}{u}\right).$$

Согласно условию $u = x,\ v = 3\sin x$. Откуда $u' = 1,\ v' = 3\cos x$.

Тогда

$$y' = (x^{3\sin x})' = x^{3\sin x}\left(3\cos x\ln x + \frac{3\sin x\cdot 1}{x}\right) = x^{\sin x}\left(3\cos x\ln x + \frac{3\sin x}{x}\right).$$

Пример 2. Найти $y''(x)$ для заданных параметрически функций $y = y(x)$:

$$\begin{cases} x = t^2 + t + 1, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$$

Решение. Сначала найдем $y'(x)$:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t^3+t)'_t}{(t^2+t+1)'_t} = \frac{3t^2+1}{2t+1}.$$

Тогда

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{3t^2+1}{2t+1}\right)'_t}{2t+1} = \frac{(3t^2+1)'(2t+1)-(2t+1)'(3t^2+1)}{(2t+1)^3} =$$

$$= \frac{6t(2t+1)-2(3t^2+1)}{(2t+1)^3} = \frac{6t^2+6t-2}{(2t+1)^3}.$$

Пример 3. Найти придел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2-2x)^{tg\pi x}.$$

Решение. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2-2x)^{tg\pi x} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tg\pi x\ln(2-2x)}$.

Здесь

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} tg\pi x\ln(2-2x) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\ln(2-2x)}{ctg\pi x} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\ln(2-2x)}{ctg\pi x} = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(\ln(2-2x))'}{(ctg\pi x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{-2}{2-2x}}{-\dfrac{\pi}{\sin^2\pi x}} = \frac{2}{\pi}.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2-2x)^{tg\pi x}=e^{\frac{2}{\pi}}$.

Пример 4. Провести полное исследование функции и построить ее график:

$$y=\frac{x^2+1}{x-1}.$$

Решение. 1^o. Область определения функциин: $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;\infty)$;

2^o. При $x=0$, $y=-1$. Функция пересекает ось Oy в точке $(0;-1)$. Функция не пересекает ось Ox, так как $y\neq 0$.

3^o. Функция на $(1;+\infty)$ знако положительний, а на $(-\infty;1)$ знако отрицательний.

4^o. Для функции не выполняютя условие $f(-x)=f(x)$ и $f(-x)=-f(x)$. Поэтому функция общего вида.

5^o. $\lim\limits_{x\to1+0}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty$ va $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty$.

Таким образом, прямая $x=1$ вертикальная асимптота.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x(x-1)}=1,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1}=1.$$

Таким образом, прямая, $y=x+1$ будет горизонтальной асимптотой.

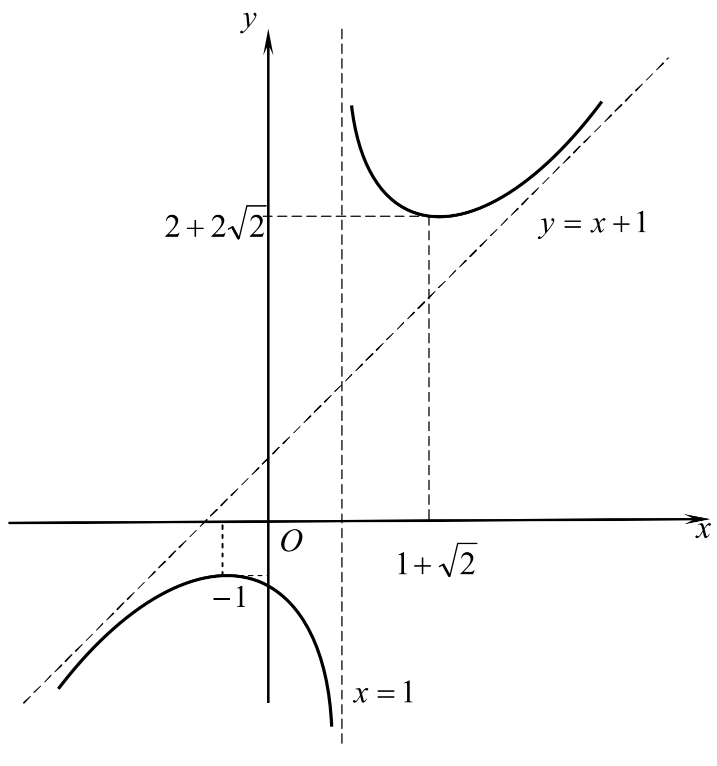


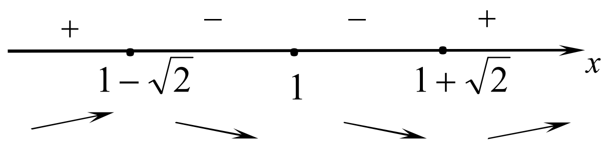
Рис. 1

6^o. Найдем интервалы монотонности функции.

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2},\ f'(x)=0 \Rightarrow\ x_1=1-\sqrt{2},\quad x_2=1+\sqrt{2}.$$

Производная в точке $x=1$ не существует и в точках $x_1=1-\sqrt{2},\ \ x_2=1+\sqrt{2}$ равна нулю. Эти точки разбивают область определения функции на четыре интервала монотонности $(-\infty;1-\sqrt{2}),\ (1-\sqrt{2};1),\ (1;1+\sqrt{2}),\ (1+\sqrt{2};+\infty)$. Функция возрастает на интервалах $(-\infty;1-\sqrt{2}),\ (1+\sqrt{2};+\infty)$ и убивает на интервалах $\left(1-\sqrt{2};1\right)$, $(1-\sqrt{2};1),\ (1;1+\sqrt{2})$.

7^o. Исследуем функцию на экстремум. Рассмотрим изменение знака y' при переходе через критические точки:



Следовательно, $x=1-\sqrt{2}-$ точка максимума, $x=1+\sqrt{2}-$ точка минимума. $y_{\max}=f(1-\sqrt{2})=2-2\sqrt{2},\ y_{\min}=f(1+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$.

8^o. Исследуем функцию на выпуклость и вогнутость и определяем точки перегиба функции. Вичислим вторую производную

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}==\frac{4}{(x-1)^3},\ f''(x)\neq 0$$

Отсюда ясно, что функция выпугла вверх на $(-\infty;1)$ и выпугла вниз на $(1;+\infty)$, функция не имеет точка перегиба.

Используя полученные в пунктах 1^o-8^o данные, строим искомий график (рис. 1).

ТЕМА 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пример 5. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$; 2) $\int\frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx$;

3) $\int\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+3.}}dx$; 4) $\int\frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x\cdot\sqrt[12]{x^5}}dx.$

Решение. 1) Подинтегральная дробь – правильная. Разложим ее на сумму простейших дробей:

$$\frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты $A,\ B,\ C$, приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю и избавляясь от знаменателей, приходим к равенству:

$$4x^2+7x+5=A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1).$$

Найдем коэффициенты $A,\ B,\ C$:

$$\begin{cases} x=1:16=8A, \\ \quad x^2:\ 4=A+B, \\ \quad x^0:\ 5=5A-C. \end{cases}$$

Откуда $A=2,\ B=2,\ C=5.$

Таким образом,

$$\int\frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx=2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{2x+5}{x^2+2x+5}dx=2\ln|x-1|+\int\frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}+$$

$$+3\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=2\ln|x-1|+\ln|x^2+2x+5|+\frac{3}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C.$$

2) Преобразуем подинтегральную функцию:

$$\int\frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx=\int\frac{3+3\cos x-1-\sin x}{1+\cos x}dx=3\int dx-\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=3x-I_1+C.$$

В интеграле I_1 воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой:

$$I_1=\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\left|\begin{array}{c} t=tg\frac{x}{2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ x=arctgt \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}dt=\int dt+\int\frac{2tdt}{1+t^2}=t+\int\frac{d(1+t^2)}{1+t^2}=$$

$$=t+\ln|1+t^2|=tg\frac{x}{2}+\ln\left|1+tg^2\frac{x}{2}\right|=tg\frac{x}{2}-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}.\right|$$

Таким образом,

$$\int\frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx=3x-tg\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C.$$

3) Применяем подстановку $x+3=t^6$, так как $EKUK(2,3,6)=6$.

Отсюда $x=t^6-3,\ dx=6t^5dt.$

Тогда

$$\int\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+3.}}dx=\int\frac{t^4+t}{t^3+t^2}\cdot 6t^5dt=$$

$$=6\int\frac{t^3+1}{t+1}\cdot t^4dt=6\int t^4(t^2-t+1)dt=$$

$$=\frac{6}{7}t^7-t^6+\frac{6}{5}t^5+C=\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+3)^7}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+3)^5}-x+C.$$

4). Представим подинтегральную функцию в стандартном виде

$$x^{-\frac{17}{12}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Отсюда видно, что под знаком интеграла стоит дифференциальный бином, при этом $m=-\frac{17}{12},\ n=\frac{1}{4},\ p=\frac{2}{3}.$ Bundan $\frac{m+1}{n}+p=-1.$

Воспользуемся третьей подстановкой Чебышева:

$$1+x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{4}}t^3 \text{ yoki } x^{\frac{1}{4}}(t^3-1)=1.$$

Откуда $t=\left(\frac{1+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^{\frac{1}{3}},\quad x=(t^3-1)^{-4},\quad dx=-12t^2(t^3-1)^{-5}dt.$

Тогда

$$\int\frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x\cdot\sqrt[12]{x^5}}dx=-12\int(t^2-1)^{\frac{17}{3}}\cdot(t^3\cdot(t^3-1)^{-1})^{\frac{2}{3}}\cdot t^2(t^3-1)^{-5}dt=$$

$$=-12\int(t^2-1)^{\frac{17}{3}-\frac{2}{3}-5}t^{2+2}dt=-12\int t^4dt=$$

$$=-\frac{12}{5}t^5+C=-\frac{12}{5}\sqrt[3]{\left(\frac{1+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^5}+C.$$

Пример 6. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{9}}\frac{xdx}{\cos^2 3x}$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2^8\sin^6 x\cos^2 xdx.$

Решение. 1) Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{\frac{\pi}{9}} \frac{xdx}{\cos^2 3x} = \left| \begin{array}{c} u = x,\ du = dx, \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 3x},\ \ v = \dfrac{1}{3} tg 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3} x tg 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{9}} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{9}} tg 3x dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{9} tg \frac{\pi}{3} - 0\right) + \frac{1}{9}\ln|\cos 3x| \Big|_0^{\frac{\pi}{9}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{9}\left(\ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right| - \ln|\cos 0|\right) =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{9}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln 1\right) = \frac{1}{27}\left(\pi\sqrt{3} - 3\ln 2\right).$$

2) Преобразуем подинтегральную функцию:

$$2^8 \sin^6 x \cos^2 x = 2^4(2^2\sin^4 x)(2^2\sin^2 x\cos^2 x) = 16(2\sin^2 x)^2(2\sin x\cos x)^2 =$$

$$= 16(1-\cos 2x)^2\sin^2 2x = 16(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\sin^2 2x =$$

$$= 16\sin^2 2x - 32\cos 2x\sin^2 2x + 16\sin^2 2x\cos^2 2x =$$

$$= 8(2\sin^2 2x) - 32\cos 2x\sin^2 2x + 4(2\sin 2x\cos 2x)^2 =$$

$$= 8 - 8\cos 4x - 32\cos 2x\sin^2 2x + 2(1-\cos 8x) =$$

$$= 10 - 8\cos 4x - 2\cos 8x - 32\sin^2 2x\cos 2x.$$

Имеем:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8\sin^6 x\cos^2 x dx = 10\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx - 8\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos 4x dx - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos 8x dx - 32\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 2x\cos 2x dx =$$

$$= 10x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - 8\cdot\frac{\sin 4x}{4}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - 2\cdot\frac{\sin 8x}{8}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - 16\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= 10\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) - 0 - 0 - 16\cdot\frac{\sin^3 2x}{3}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 5\pi.$$

Пример 7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой l вокруг заданной оси:

l: дуга астроиды $x = 5\cos^3 t,\ y = 5\sin^3 t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ вокруг оси Oy.

Решение. Если дуга кривой, заданная параметрическими уравнениями $x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ \alpha \le t \le \beta$, вращается вокруг оси Oy, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$\sigma = 2\pi\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x = 5\cos^3 t,\ y = 5\sin^3 t \quad \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ вокруг оси Oy: (рис. 2):

$$\sigma = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos^3 t\sqrt{(-15\cos^2 t\sin t)^2 + (15\sin^2 t\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 150\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\sqrt{(\cos t\sin t)^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt = 150\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\cos t\sin t\,dt =$$

$$= 150\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\sin t\,dt = -150\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,d(\cos t) = -150\pi \cdot \left.\frac{\cos^5 t}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 30\pi.$$

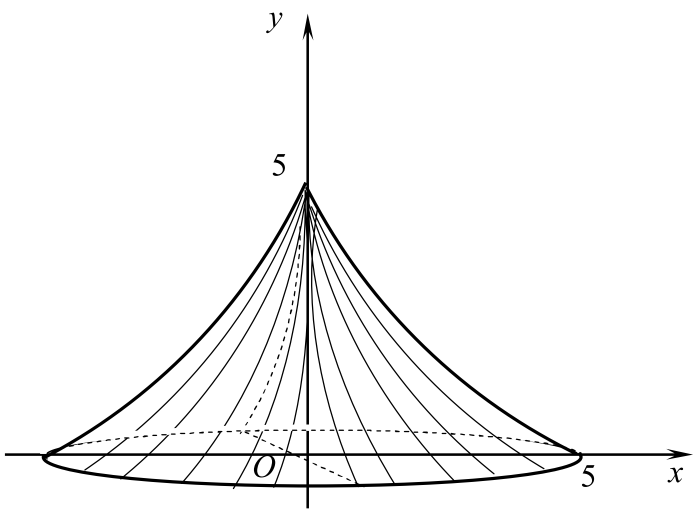


Рис 2

Пример 8. (8.1-8.15). Найти координаты центра тяжести однородной плоской дуги кривой l:

l: одна арка циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

Решение. Первая арка циклоиды симметрична относительно прямой $x = \pi a$. Поэтому абсциссса центра тяжести равна $x_c = \pi a$.

Находим ординату центра тяжести астроиды по формуле

$$y_c = \frac{\int_a^b \gamma y\,dl}{m}, \quad m = \int_a^b \gamma \cdot dl$$

Здесь

$$dl = \sqrt{\left(a(t - \sin t)'\right)^2 + \left(a(1 - \cos t)'\right)}dt = \sqrt{a^2\left((1 - \cos t)^2 + \sin^2 t\right)}dt =$$

$$= a\sqrt{2-2\cos t}\,dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

Считаем $\gamma = const$, так как, кривая однородная.

Тогда

$$m = \gamma\int_0^{2\pi} dl = \ 2\gamma a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = -4\gamma a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 8\gamma a;$$

$$2\gamma a\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt = 2\gamma a^2\int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= -8\gamma a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\cdot d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -8\gamma a^2\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -8\gamma a^2\left(-1-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{3}\gamma a^2;$$

$$y_c = \frac{32\gamma a^2}{3\cdot 8\gamma a} = \frac{4}{3}a.$$

Итак, $C\left(\pi a;\dfrac{4a}{3}\right)$.

Пример 8. (8.16-8.25). Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры D, ограниченной данными линиями:

D: ограниченной прямой $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ и осями координат.

Решение. Найдем из уравнения прямой: $y = -\dfrac{b}{a}x + b.$

Воспользуемся следующими формулами

$$x_c = \frac{\int_a^b \gamma xy\,dx}{m}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \gamma y^2 dx}{m}, \ m = \int_a^b \gamma y\,dx.$$

Тогда

$$m = \gamma\int_0^a\left(-\frac{b}{a}x+b\right)dx = \gamma\left(-\frac{b}{a}\cdot\frac{x^2}{2}+bx\right)\Bigg|_0^a = \gamma\left(-\frac{ba}{2}+ba\right) = \frac{ba\gamma}{2};$$

$$\gamma\int_0^a x\left(-\frac{b}{a}x+b\right)dx = \gamma\left(-\frac{b}{a}\cdot\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^a = \gamma\left(-\frac{ba^2}{3}+\frac{ba^2}{2}\right) = \frac{ba^2\gamma}{6};$$

$$\frac{\gamma}{2}\int_0^a\left(-\frac{b}{a}x+b\right)^2 dx = \frac{\gamma}{2}\int_0^a\left(b^2-\frac{2b^2}{a}x+\frac{b^2}{a^2}x^2\right)dx =$$

$$= \frac{\gamma}{2}\left(b^2x-\frac{2b^2}{a}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ab^2\gamma}{6};$$

$$x_c = \frac{ba^2\gamma \cdot 2}{6 \cdot ba\gamma} = \frac{a}{3}; \quad y_c = \frac{ab^2\gamma \cdot 2}{6 \cdot ba\gamma} = \frac{b}{3}.$$

Итак, $C\left(\frac{a}{3};\frac{b}{3}\right)$.

ТЕМА 3. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пример 9. Найти общее решение ураввнений:

1) $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{3+x^2}dy = 0$; 2) $(3xy + x^2)y' - 3y^2 = 0$.

Решение. 1) Эта уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{4+y^2} \cdot \sqrt{3+x^2} \neq 0$. Получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{xdx}{\sqrt{3+x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{4+y^2}} = 0.$$

Интегрируя обе части уравнения, имеем:

$$\sqrt{3+x^2} + \sqrt{4+y^2} = C.$$

Отсюда

$$\sqrt{4+y^2} = C - \sqrt{3+x^2}$$

или

$$y = \sqrt{(C - \sqrt{3+x^2})^2 - 4}.$$

2) Преобразуем уравнения к виду

$$y' = \frac{3y^2}{3xy + x^2}$$

где $f(x,y) = \dfrac{3y^2}{3xy + x^2}$ – однородная функция.

Следовательно, данное уравнение однородное.

Сделаем подстановку $y = ux, \; y' = u'x + x$

$$u'x + u = \frac{3x^2u^2}{3x^2u + x^2} \quad \text{yoki} \quad u'x + u = \frac{3u^2}{3u+1}.$$

Отсюда

$$u'x = \frac{3u^2 - 3u^2 - u}{3u+1} \quad \text{yoki} \quad u'x = -\frac{u}{3u+1}.$$

Разделяем переменных:

$$\frac{3u+1}{u}du = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, имеем:

$$\int \frac{3u+1}{u}du = \ln C - \int \frac{dx}{x} \quad \text{yoki} \quad \ln|u| + 3u = \ln C - \ln|x|.$$

Откуда $3u = \ln\frac{C}{xu}$. Сделаем подстановку $u = \frac{y}{x}$:

$$3\frac{y}{x} = \ln\frac{C}{y} \quad \text{или} \quad y = Ce^{-\frac{3y}{x}}.$$

Пример 10. Решить задачу Коши:

$$y' - ytgx + y^2\cos x = 0, \ \ y(0) = \frac{1}{2}.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду: $y' - ytgx = -y^2\cos x$.

Это уравнение Бернулли, где $n = 2$.

Полагаем $z = y^{1-2} = y^{-1}$ и получаем линейное уравнение

$$z' + ztgx = \cos x.$$

Сделаем подстановку $z = uv, \ \ z' = u'v + v'u$:

$$u'v + u(v' + vtgx) = \cos x.$$

Для определения функции $u, \ v$ решаем систему

$$\begin{cases} v' + vtgx = 0, \\ u'v = \cos x \end{cases}.$$

Из первой уравнение системы найдем частное решение $v = \cos x$ и подставым ее на второе уравнение:

$$u'\cos x = \cos x, \quad u' = 1, \quad u = x + C.$$

Найдем общие решение исходного уравнения:

$$z = uv, \qquad z = (x + C)\cos x.$$

Откуда $y^{-1} = (x + C)\cos x$ или $y = \dfrac{1}{(x + C)\cos x}$.

Наконец, учитывая, что $y(0) = \dfrac{1}{2}$, т.е. $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{C}$, получим $C = 2$.

Следовательно, $y = \dfrac{1}{(x + 2)\cos x}$.

Пример 11. Решить дифференциальные уравнения методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}.$$

Решение. Запишем уравнение без правой части $y'' + 9y = 0$. Его характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 9 = 0$, откуда $k_{1,2} = \pm 3i$, т.е.

$$y_1 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = C_1(x)\cos 3x + C_2(x)\sin 3x.$$

По методу вариации произвольных постоянных, имеем

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 3x + C_2'(x)\sin 3x = 0, \\ -3C_1'(x)\sin 3x + 3C_2'(x)\cos 3x = \dfrac{1}{\sin 3x} \end{cases}.$$

Откуда $C_1'(x) = -\dfrac{1}{3},\ C_2'(x) = \dfrac{1}{3} ctg 3x$

или после интегрирования

$$C_1(x) = -\frac{1}{3}x,\ C_2(x) = \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения

$$\bar{y} = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|\sin 3x$$

и общее решение

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|\sin 3x,$$

$$y = \left(C_1 - \frac{1}{3}x\right)\cos 3x + \left(C_2 + \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|\right)\sin 3x.$$

Пример 12. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = \ \ y_1 + y_2 + \sin x, \\ y_2' = 3y_1 - y_2 - \cos x. \end{cases}$$

Решение. 1) Преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} y_1' = \ \ y_1 + y_2, \\ y_2' = 3y_1 - y_2. \end{cases}$$

Составим характерическое уравнение и решим ее:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \ \lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = 2.$$

Находим собственные числа. При $\lambda_1 = -2$ имеем: $3\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0$, $\alpha_{11} = 1$ и $\alpha_{21} = -3$. При $\lambda_2 = 2$ имеем: $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{22} = 1$.

Тогда решение однородной системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = \ \ C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}, \\ y_2 = -3C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} \end{cases}.$$

Частное решение заданной системы ищем в виде:

$$\begin{cases} \overline{y}_1 = A_1 \cos x + B_1 \sin x, \\ \overline{y}_2 = A_2 \cos x + B_2 \sin x \end{cases}.$$

Откуда

$$\begin{cases} \overline{y}_1' = -A_1 \sin x + B_1 \cos x, \\ \overline{y}_2' = -A_2 \sin x + B_2 \cos x. \end{cases}$$

Подставим $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$, $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2'$ в заданную систему и приравнивая коэффициентов перед $\cos x$ и $\sin x$ находим:

$$A_1 = 0, \ B_1 = -\frac{1}{5}, \ A_2 = -\frac{1}{5}, \ B_2 = -\frac{4}{5}.$$

Итак, искомые частные и общее решения имеет вид:

$$\begin{cases} \overline{y}_1 = -\frac{1}{5}\sin x, \\ \overline{y}_2 = -\frac{1}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_1 = \ \ C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{5}\sin x, \\ y_2 = -3C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x. \end{cases}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Пример 1. Найти производные функций:

1.1. 1) $y=\sqrt[3]{5x^4-2x-1}+\dfrac{8}{(x-5)^2}$. 2) $y=ctg\dfrac{1}{x}\cdot\arccos x^4$.

3) $y=\dfrac{(2x+5)^3}{e^{tgx}}$. 4) $y=(\cos x)^{x^2-4}$.

1.2. 1) $y=\dfrac{3}{(x+2)^5}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$. 2) $y=tg\sqrt{x}\cdot arcctg3x^5$.

3) $y=\dfrac{e^{tg\,3x}}{4x^2-3x+5}$. 4) $y=(x^3+1)^{\cos x}$.

1.3. 1) $y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\dfrac{5}{4x^2+3x-5}$. 2) $y=tg^3 2x\cdot\arccos 2x^3$.

3) $y=\dfrac{e^{\sin 2x}}{(x+5)^4}$. 4) $y=(arctgx)^{5x-1}$.

1.4. 1) $y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\dfrac{2}{2x^2-3x+7}$. 2) $y=2^{tgx}\cdot arctg^5 3x.$

3) $y=\dfrac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$. 4) $y=(arctgx)^{x-1}$.

1.5. 1) $y=\dfrac{3}{4x-3x^2+1}-\sqrt{(x+5)^5}$. 2) $y=tg^3 2x\cdot\arcsin x^5$.

3) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-7}}{e^{x^3}}$. 4) $y=x^{\cos 2x}$.

1.6. 1) $y=\dfrac{3}{(x-4)^2}+\sqrt[6]{2x^2-3x+1}$. 2) $y=ctg^7 x\cdot\arccos 2x^3$.

3) $y=\dfrac{e^x-tgx}{4x^2+7x-5}$. 4) $y=x^{x+3}$.

1.7) 1) $y=\dfrac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4-3x-x^4}$. 2) $y=e^{-\sin x}tg7x^6$.

3) $y=\dfrac{\cos^3 x}{(2x+4)^5}$. 4) $y=(\sin x)^{3x}$.

1.8. 1) $y=\dfrac{2}{(x-1)^3}-\dfrac{8}{6x^2+3x-7}$.

2) $y=e^{\cos x}\cdot ctg8x^3$.

3) $y=\sqrt{5x^2-x+1}\cdot e^{-3x}$.

4) $y=(\cos x)^{x^2}$.

1.9. 1) $y=\dfrac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3x^2}$.

2) $y=\cos^5 x\cdot\arccos 4x$.

3) $y=\dfrac{2^{x^2}}{(2x-5)^7}$.

4) $y=(tgx)^{\sin x}$.

1.10. 1) $y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}+\dfrac{4}{(x-4)^4}$.

2) $y=\sin^3 7x\cdot arcctg5x^2$.

3) $y=\dfrac{e^{\sin 5x}}{(3x-2)^2}$.

4) $y=x^{3x}2^x$.

1.11. 1) $y=\sqrt[3]{3x^2-4x+5}+\dfrac{4}{(x-3)^5}$.

2) $y=\sin^2 3x\cdot arcctg3x^5$.

3) $y=(3x+1)^4\cdot e^{-4x}$.

4) $y=x^{\sin 3x}$.

1.12. 1) $y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\dfrac{4}{(x+2)^3}$.

2) $y=\cos\sqrt[5]{x}\cdot arctgx^4$.

3) $y=(5x^2+4x-2)^2\cdot e^{-3x}$.

4) $y=(x^2+1)^{\sin x}$.

1.13. 1) $y=\dfrac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(3x^2-x+1)^4}$.

2) $y=tg^6 2x\cdot\cos 7x^2$.

3) $y=\dfrac{e^{ctg5x}}{(3x-5)^4}$.

4) $y=(\sin 2x)^{x+1}$.

1.14. 1) $y=\sqrt[3]{(x-4)^7}-\dfrac{10}{(3x^2-5x+1)}$.

2) $y=ctg^3 4x\cdot\arcsin\sqrt{x}$.

3) $y=\dfrac{(2x-3)^7}{e^{2x}}$.

4) $y=(x+1)^{tg2x}$

1.15. 1) $y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\dfrac{4}{(x-2)^5}$.

2) $y=2^{\cos x}\cdot arctg\,5x^3$.

3) $y=\dfrac{3^{x^2}}{(2x^2-x+4)^2}$.

4) $y=(\sin x)^{x^2-1}$

1.16. 1) $y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\dfrac{3}{2x^3-3x+1}.$ 2) $y=4^{-x}\cdot\ln^5(x+2).$

3) $y=\dfrac{e^{4x}}{(3x+5)^3}.$ 4) $y=(3x^2-1)^{\arcsin x}.$

1.17. 1) $y=\dfrac{7}{(x+2)^5}-\sqrt{8-5x+2x^2}.$ 2) $y=3^{tgx}\cdot\arcsin 7x^4.$

3) $y=\dfrac{e^{\sin 4x}}{(2x-5)^6}.$ 4) $y=(e^x)^{x+4}.$

1.18. 1) $y=\sqrt[3]{(x-1)^5}+\dfrac{5}{2x^2-4x+7}.$ 2) $y=5^{x^2}\cdot\arccos 2x^5.$

3) $y=\dfrac{3x^2-5x+10}{e^{x^4}}.$ 4) $y=(x^3-1)^{x^2-1}.$

1.19. 1) $y=\sqrt{(x-4)^5}+\dfrac{5}{(2x^2+4x-1)^2}.$ 2) $y=\sin^4 3x\cdot arctg 2x^3.$

3) $y=\dfrac{\sqrt{7x^3-5x+2}}{e^{\cos x}}.$ 4) $y=(tgx)^{x^3+1}.$

1.20. 1) $y=\sqrt[5]{7x^2-3x^3+5}-\dfrac{5}{(x-1)^3}.$ 2) $y=tg^3 2x\cdot\arcsin\sqrt{x}$

3) $y=\dfrac{e^{tg 3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}.$ 4) $y=(e^{3x})^{\sin x}.$

1.21. 1) $y=\sqrt{(x-3)^7}+\dfrac{9}{7x^2-5x-8}.$ 2) $y=\sin^5 3x\cdot arctg\sqrt{x}.$

3) $y=\dfrac{e^{x^3}}{\sqrt{x^2+5x-1}}.$ 4) $y=x^{\arcsin x}.$

1.22. 1) $y=\sqrt[3]{x-8}-\dfrac{2}{1-3x-4x^2}.$ 2) $y=\cos^4 3x\cdot\arcsin 3x^2.$

3) $y=\dfrac{e^{ctg 5x}}{(3x^2-4x+2)}.$ 4) $y=(\arcsin x)^x.$

1.23. 1) $y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\dfrac{4}{7x^2-3x+2}$. 2) $y=\sin^3 2x\cdot\cos 8x^5$.

3) $y=\dfrac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$. 4) $y=(tgx)^{3e^x}$.

1.24. 1) $y=\sqrt[5]{(x-2)^6}+\dfrac{3}{6x^2+3x-7}$. 2) $y=\cos^5 3x\cdot tg\left(4x+1\right)^3$.

3) $y=\dfrac{e^{\sin 5x}}{(3x-2)^2}$ 4) $y=(\sin x)^{x+6}$.

1.25. 1) $y=\sqrt{1+5x-2x^2}+\dfrac{3}{(x-3)^4}$. 2) $y=tg^4 x\cdot\arcsin 4x^2$.

3) $y=\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}$. 4) $y=x^{\sin 5x-1}$.

Пример 2. Найти $y''(x)$ для заданных параметрически функций $y=y(x)$:

2.1. $\begin{cases}x=t+\sin t,\\ y=t-\cos t.\end{cases}$

2.2. $\begin{cases}x=t^5+2t,\\ y=t^3+8t-1.\end{cases}$

2.3. $\begin{cases}x=e^{2t},\\ y=\cos t.\end{cases}$

2.4. $\begin{cases}x=ctgt,\\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}.\end{cases}$

2.5. $\begin{cases}x=\ln\cos 2t,\\ y=\sin^2 2t.\end{cases}$

2.6. $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}t^3+t,\\ y=\ln(t^2+1).\end{cases}$

2.7. $\begin{cases}x=1-e^{3t},\\ y=\dfrac{1}{3}(e^{3t}+e^{-3t}).\end{cases}$

2.8. $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-arctg\,t.\end{cases}$

2.9. $\begin{cases}x=2(t-\sin t),\\ y=2(1-\cos t).\end{cases}$

2.10. $\begin{cases}x=tgt,\\ y=\dfrac{1}{\sin^2 t}.\end{cases}$

2.11. $\begin{cases}x=\sin^3 4t,\\ y=\dfrac{1}{2}\cos^3 4t.\end{cases}$

2.12. $\begin{cases}x=tgt+ctgt,\\ y=2\ln ctg\ t.\end{cases}$

2.13. $\begin{cases}x=4-e^{2t},\\ y=\dfrac{3}{e^{2t}+1}.\end{cases}$

2.14. $\begin{cases}x=3\cos^2 t,\\ y=2\sin^3 t.\end{cases}$

2.15. $\begin{cases} x = 2 - \cos t, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} x = t + \ln\cos t, \\ y = t - \ln\sin t. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} x = 3 + \cos t, \\ y = t + \sin t. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos\ 2t. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2}, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} x = t^3 + t^2 + t, \\ y = t^2 + \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\sin 2t, \\ y = \cos 2t. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\sin 2t, \\ y = \cos 2t. \end{cases}$

Пример 3. Найти придел, используя правило Лопиталя:

3.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tg5x}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$.

3.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5 - 5e^{-x}}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx - \sin x}{4x - \sin x}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to 0}(1 - \cos 2x)ctg2x$.

3.7. $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln^2 x$.

3.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

3.10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x}\right)$.

3.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - a^{\sin x}}{x^2}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{\ln(1 + 2x)}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{\sin 2x}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to \infty}(x^3 e^{-x})$.

3.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)tg\dfrac{x}{2}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

3.23. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{ctgx}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$.

Пример 4. Провести полное исследование функции и построить ее график:

4.1. $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$

4.2. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

4.3. $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$.

4.4. $y=\dfrac{2}{x^2+x+1}$.

4.5. $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$.

4.6. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

4.7. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

4.8. $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$.

4.9. $y=\dfrac{2x^2}{4x^2-1}$.

4.10. $y=\dfrac{x}{3-x^2}$.

4.11. $y=\dfrac{2x+1}{x^2}$.

4.12. $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$.

4.13. $y=\dfrac{1}{x^2-9}$.

4.14. $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

4.15. $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$.

4.16. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

4.17. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

4.18. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

4.19. $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$.

4.20. $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

4.21. $y=\dfrac{5x^2}{x^2-25}$.

4.22. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$.

4.23. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

4.24. $y=\dfrac{x^3+16}{x}$.

4.25. $y=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2}$.

Пример 5. Найти неопределенные интегралы:

5.1. 1) $\displaystyle\int\frac{7x-7}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx.$ 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}.$

3) $\displaystyle\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx.$ 4) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}dx.$

5.2. 1) $\displaystyle\int\frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx.$ 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x}.$

3) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx.$ 4) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\cdot\sqrt[15]{x^4}}dx.$

5.3. 1) $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+1}{(x+2)(x^2+4)}dx.$ 2) $\displaystyle\int\frac{\sin x dx}{5+3\sin x}.$

3) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx.$ 4) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[9]{x^4}}dx.$

5.4. 1) $\displaystyle\int\frac{x^2-4x+12}{x^3+8}dx.$ 2) $\displaystyle\int\frac{\cos x dx}{1+\sin x+\cos x}.$

3) $\displaystyle\int\frac{1+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx.$ 4) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\cdot\sqrt[15]{x}}dx.$

5.5. 1) $\displaystyle\int\frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx.$ 2) $\displaystyle\int\frac{6\sin x-5\cos x+7}{1+\cos x}dx.$

3) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+1}dx.$ 4) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\cdot\sqrt[9]{x^8}}dx.$

5.6. 1) $\int \frac{3x^2+5x-1}{(x+1)(x^2+2)}$.

2) $\int \frac{dx}{3\cos x - 5}$.

3) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$.

4) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x\cdot\sqrt[8]{x^7}}dx$.

5.7. 1) $\int \frac{2x^3+1}{(x+2)(x^2+2x+3)}dx$.

2) $\int \frac{dx}{5\cos x+3}$.

3) $\int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$.

4) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[9]{x^4}}dx$.

5.8. 1) $\int \frac{3x-5}{(x+1)(x^2+1)}dx$.

2) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+3}$.

3) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$.

4) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2\cdot\sqrt[20]{x^7}}dx$.

5.9. 1) $\int \frac{5x+6}{(x-2)(x^2-x+1)}dx$.

2) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x+\cos x+1}dx$.

3) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}}dx$.

4) $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[12]{x^5}}dx$.

5.10. 1) $\int \frac{x^2+2x-1}{(x+2)(x^2+x+1)}dx$.

2) $\int \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

3) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

4) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}dx$.

5.11. 1) $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$.

2) $\int \frac{dx}{\sin x+3\cos x+5}$.

3) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$.

4) $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[5]{x^2}}dx$.

5.12. 1) $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$.

2) $\int \frac{dx}{2\cos x-\sin x+3}$.

3) $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

4) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\cdot\sqrt[6]{x^5}}dx$.

5.13. 1) $\int \frac{x^2+3x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}dx.$ 2) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x}.$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}.$ 4) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\cdot\sqrt[3]{x}}dx.$

5.14. 1) $\int \frac{3x+2}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx.$ 2) $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}.$

3) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx.$ 4). $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\cdot\sqrt[6]{x^5}}dx.$

5.15. 1) $\int \frac{5x+2}{(x+3)(x^2+2x+2)}dx.$ 2) $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x+\cos x}.$

3) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+1}dx.$ 4) $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x^6}}}{x^2\cdot\sqrt[25]{x^{11}}}dx.$

5.16. 1) $\int \frac{5x-3}{(x+1)(x^2+1)}dx.$ 2) $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x};$

3) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[6]{x})}dx.$ 4) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt{x}}dx.$

5.17. 1) $\int \frac{12-6x}{(x+2)(x^2-4x+13)}dx.$ 2) $\int \frac{dx}{3\cos x+5}.$

3) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx.$ 4) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\cdot\sqrt[9]{x^5}}dx.$

5.18. 1) $\int \frac{2x^2+2x+10}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx.$ 2) $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}.$

3) $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$ 4) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2\cdot\sqrt[5]{x^2}}dx.$

5.19. 1) $\int \frac{3x+7}{(x+2)(x^2+2x+3)}dx.$ 2) $\int \frac{dx}{8+4\cos x}.$

3) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx.$ 4) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2\cdot\sqrt[5]{x}}dx.$

5.20. 1) $\int \frac{4x+3}{(x-2)(x^2+x+1)}dx.$ 2) $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x + 4}.$

3) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx.$ 4) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \cdot \sqrt[8]{x}}dx.$

5.21. 1) $\int \frac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx.$ 2) $\int \frac{\cos dx}{2+\cos x}.$

3) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x^2}}.$ 4) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}dx.$

5.22. 1) $\int \frac{2x+22}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx.$ 2) $\int \frac{dx}{\sin x - 3\cos x + 2}.$

3) $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+3}}dx.$ 4) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x \cdot \sqrt[12]{x^7}}dx.$

5.23. 1) $\int \frac{2x^2+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx.$ 2) $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x}.$

3) $\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}.$ 4) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x \cdot \sqrt[10]{x^9}}dx.$

5.24. 1) $\int \frac{x^2+3x+1}{(x-1)(x^2-6x+13)}dx.$ 2) $\int \frac{dx}{2\cos x - 4\sin x + 5}.$

3) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx.$ 4) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}}dx.$

5.25. 1) $\int \frac{5x^2+6}{x^3+27}dx.$ 2). $\int \frac{dx}{5+2\sin x + 3\cos x}.$

3) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-\sqrt[3]{x+2}+2}dx.$ 4) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}}dx.$

Пример 6. Вычислить определенные интегралы:

6.1. 1) $\int_{-2}^{0} (x+2)^2 \cos 3x dx.$ 2) $\int_{0}^{\pi} 2^4 \cos^8 x dx.$

6.2. 1) $\int_{1}^{e^2} \sqrt{x} \ln^2 x dx.$ 2) $\int_{0}^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx.$

6.3. 1) $\int_0^3 (x^2 - 3x)\sin x dx.$ 2) $\int_0^{2\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx.$

6.4. 1) $\int_1^2 x\ln(3x+2)dx.$ 2) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x dx.$

6.5. 1) $\int_1^2 x^2 \ln x dx.$ 2) $\int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4} dx.$

6.6. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+1)\cos x dx.$ 2) $\int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^6 \frac{x}{4} dx.$

6.7. 1) $\int_{-1}^1 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$ 2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$

6.8. 1) $\int_0^1 x arctgx dx;$ 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2^8 \sin^8 x dx.$

6.9. 1) $\int_{-2}^0 (x-1)e^{-\frac{x}{2}} dx;$ 2) $\int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx.$

6.10. 1) $\int_1^e x\ln^2 x dx.$ 2) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x dx.$

6.11. 1) $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$ 2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \cos^8 x dx.$

6.12. 1) $\int_0^{e-1} \ln^2(x+1)dx.$ 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$

6.13. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin\frac{x}{2} dx.$ 2) $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx.$

6.14. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}.$ 2) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx.$

6.15. 1) $\int_0^{\sqrt{e}} x^2 \ln x dx.$ 2) $\int_0^{2\pi} \cos^8 \frac{x}{4} dx.$

6.16. 1) $\int_1^e \ln^3 x dx.$ 2) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2} dx.$

6.17. 1) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx.$ 2) $\int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x dx.$

6.18. 1) $\int_{-2}^{0} (x^2 - 4)\cos 3x dx.$ 2) $\int_{-\pi}^{0} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx.$

6.19. 1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$ 2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx.$

6.20. 1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{3} (3x - x^2)\sin 2x dx.$ 2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$

6.21. 1) $\int_{-1}^{0} x^2 \ln(1 - x) dx.$ 2) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx.$

6.22. 1) $\int_0^{\pi} (x + 1)^2 \cos \frac{x}{2} dx.$ 2) $\int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{x}{4} dx.$

6.23. 1) $\int_1^{e} \frac{3\ln x}{x^2} dx.$ 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2^8 \cos^8 x dx.$

6.24. 1) $\int_{-1}^{0} (x + 1)e^{-2x} dx.$ 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$

6.25. 1) $\int_0^{1} x \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$ 2) $\int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 \frac{x}{2} dx.$

Пример 7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой l вокруг заданной оси:

7.1. l: дуга кривой $x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, Ox.

7.2. l: дуга астроиды $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$, Oy.

7.3. l: дуга одной арки циклоиды $x = 3(t - \sin t),\ y = 3(1 - \cos t)$, Ox.

7.4. l: дуга окружности $r = 4\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, Ox.

7.5. l: дуга кривой $x = \frac{t^3}{24},\ y = 4 - \frac{t^2}{16},\ 0 \le t \le 2\sqrt{2}$, Ox.

7.6. l: дуга кривой $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$, $1\le x\le e$, *Ox*.

7.7. l: дуга синисоиды $y=\sin x$, $0\le x\le \pi$, *Ox*.

7.8. l: дуга эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, $0\le x\le 5$, *Ox*.

7.9. l: дуга цепной линии $y=2ch\frac{x}{2}$, $0\le x\le 2$, *Ox*.

7.10. l: дуга параболы $x^2=2y$, $0\le y\le \frac{3}{2}$, *Oy*.

7.11. l: дуга кривой $r=\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$, $0\le \varphi\le \frac{\pi}{2}$, *Ox*.

7.12. l: дуга параболы $y^2=2x+1$, $0\le x\le 7$, *Ox*.

7.13. l: дуга лимнискаты $r^2=9\cos 2\varphi$, $0\le \varphi\le \frac{\pi}{4}$, *Ox*.

7.14. l: дуга кривой $r=4\cos\varphi$, *Ox*.

7.15. l: дуга кардиоиды $r=2(1-\cos\varphi)$, $-\pi\le \varphi\le -\frac{\pi}{2}$, *Ox*.

7.16. l: дуга кривой $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $0\le t\le \frac{\pi}{2}$, *Oy*.

7.17. l: дуга кривой $x=\frac{y^2}{4}-\frac{\ln y}{2}$, $1\le y\le e$, *Oy*.

7.18. l: дуга кривой $x=\cos t$, $y=1+\sin t$, *Ox*.

7.19. l: дуга кривой $x=4-\frac{t^2}{2}$, $y=\frac{t^3}{3}$, $0\le t\le 2\sqrt{2}$, *Oy*.

7.20. l: дуга эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, $0\le y\le 5$, *Oy*.

7.21. l: дуга кривой $r=\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$, $0\le \varphi\le \frac{\pi}{2}$, *Ox*.

7.22. l: дуга одной арки циклоиды $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, *Oy*.

7.23. l: дуга кардиоиды $r = 5(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, *Oy*.

7.24. l: дуга астроиды $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$, *Ox*.

7.25. l: дуга кривой $y = e^{-x}$, $x \ge 0$, *Ox*.

Пример 8. (8.1-8.15). Найти координаты центра тяжести однородной плоской дуги кривой l:

8.1. l: дуга астроиды $x = 2\cos^3\frac{t}{4}$, $y = 2\sin^3\frac{t}{4}$, расположенная в первом квадранте.

8.2. l: дуга кривой $r = 2\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

8.3. l: дуга цепной линии $y = 3ch(x-3)$ $-3 \le x \le 3$.

8.4. l: дуга астроиды $x = 5\cos^3 t$, $y = 5\sin^3 t$, расположенная слева от оси Oy .

8.5. l:дуга окружности $x^2 + y^2 = 9$, стягивающая центральный угол $\varphi = 60^o$.

8.6. l: дуга кардиоиды $r = 2(1-\cos\varphi)$, $-\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$.

8.7. l: дуга кривой $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$, $0 \le t \le 1$.

8.8. l: дуга развертки окружности $x = 3(\cos t + t\sin t)$, $y = 3(\sin t - t\cos t)$ ($0 \le t \le \pi$).

8.9. l: дуга кривой $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

8.10. l: полуокружность $x^2 + y^2 = 25$, расположенная над оси Ox .

8.11. l: дуга кардиоиды $r = 4(1+\cos\varphi)$ $0 \le \varphi \le \pi$.

8.12. l: дуга цепной линии $y = ach\frac{x}{a}$, $-a \le x \le a$.

8.13. l: дуга окружности $x^2 + y^2 = 16$ расположенная направо от оси Oy .

8.14. l: дуга астроиды $x = 3\cos^3\frac{t}{2}$, $y = 3\sin^3\frac{t}{2}$ расположенная в третьем квадранте.

8.15. l: дуга кривой $r = 2\cos\varphi$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ dan $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

Пример 8. (8.16-8.25). Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры D, ограниченной данными линиями:

8.16. D: ограничена первой петлей лимнискаты $r^2 = 9\cos 2\varphi$.

8.17. D: ограничена дугой синисоиды $y = \sin x$ и отрезком оси Ox ($[0;\pi]$).

8.18. D: ограничена кривыми $y^2 = 3x$ и $x^2 = 3y$.

8.19. D: ограничена дугой астроиды $x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$.

8.20. D: ограничена кардиоидой $r = 2(1-\cos\varphi)$.

8.21. D: ограничена осями координат и дугой эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ($y \ge 0,\ x \ge 0$).

8.22. D: ограничена кривыми $y = (x-2)^2,\ x = 0,\ y = 0$.

8.23. D: ограничена дугой окружности $x^2 + y^2 = 16$, стягивающая центральный угол $\varphi = 60^o$.

8.24. D: ограничена кривыми $x + y = 6,\ y = 0,\ x = 0$.

8.25. D: ограничена осями координат и дугой косинусоиды $y = \cos x$.

Пример 9. Найти общее решение ураввнений:

9.1. 1) $(1+e^{-x})yy' = 1.$ 2) $y^2 + x^2y' = xyy'.$

9.2. 1) $y^{'}\ln y = e^{3x}.$ 2) $xy^2y' = x^3 + y^3.$

9.3. 1) $\cos^3 yy' - \cos(2x-y) = (\cos 2x + y).$ 2) $(4y+5x)dx + (5y+7x)dy = 0.$

9.4. 1) $(e^x + 8)2y - ye^x dx = 0.$ 2) $xy' = y\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right).$

9.5. 1) $3^{x^2+y}dy + xdx = 0.$ 2) $(2\sqrt{xy} - x)y' + y = 0.$

9.6. 1) $e^{-x^2}dy - x(1+y^2)dx = 0.$ 2) $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}.$

9.7. 1) $e^{3y+x}dx = ydy.$ 2) $x^3y' = y(y^2 + x^2).$

9.8. 1) $x + xy + y'(y + xy) = 0.$ 2) $y' - \frac{y}{x} = tg\frac{y}{x}.$

9.9. 1) $2yx^2dy=(1+x^2)dx.$ 2) $xy'-y=(x+y)+\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right).$

9.10. 1) $(xy^2+x)+y'(y-x^2y)=0.$ 2) $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}.$

9.11. 1) $xydy=(1-x^2)dx.$ 2) $xy'=y\cos\left(\ln\dfrac{y}{x}\right).$

9.12. 1) $y'+\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}=0.$ 2) $(x^2-2xy)y'=xy-y^2.$

9.13. 1) $\sin y\cos xdy=\cos y\sin xdx.$ 2) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}.$

9.14. 1) $y'=10^{x+y}.$ 2) $(y+\sqrt{xy})=xy'.$

9.15. 1) $\sqrt{1-x^2}dy-x\sqrt{1-y^2}dx=0.$ 2) $y\ln\dfrac{y}{x}dx-xdy=0.$

9.16. 1) $(1+y)dx=(x-1)dy.$ 2) $xyy'=y^2+2x^2.$

9.17. 1) $\sqrt{4-x^2}y'+xy^2+x=0.$ 2) $xy+y^2=(2x^2+xy)y'.$

9.18. 1) $x^2dy-(2xy+3y)dx=0.$ 2) $(y+2x)dy-ydx=0.$

9.19. 1) $(1+y^2)dx-\sqrt{x}dy=0.$ 2) $(2y^2+3x^2)xdy=(3y^3+6yx^2)dx.$

9.20. 1) $1+(1+y')e^y=0.$ 2) $y^2=x(x+y)y'.$

9.21. 1) $(4x+2xy^2)dx-(3y-3x^2y)dy=0.$ 2) $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0.$

9.22. 1) $\sin yy'-y\cos x=2\cos x.$ 2) $(y^2-2xy)dx-x^2dy=0.$

9.23. 1) $y'=(2y+1)tgx.$ 2) $ydx-xdy=\sqrt{x^2+y^2}dy.$

9.24. 1) $\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x^2ydy.$ 2) $xy'=4\sqrt{2x^2+y^2}+y.$

9.25. 1) $x(4+e^y)dx-e^ydy=0.$ 2) $\left(xye^{\frac{x}{y}}+y^2\right)=x^2e^{\frac{x}{y}}y'.$

Пример 10. Решить задачу Коши:

10.1. $y'x+y=\dfrac{xy^2}{3},\quad y(1)=3.$ **10.2.** $y'+y=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y},\quad y(0)=\dfrac{9}{4}.$

10.3. $y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1.$

10.4. $xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = \frac{1}{2}.$

10.5. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, \quad y(1) = 1.$

10.6. $y' + 2xy = 2x^3 y^2, \quad y(0) = \sqrt{2}.$

10.7. $y' + y = xy^2, \quad y(0) = 1.$

10.8. $2(y' + y) = xy^2, \quad y(0) = 2.$

10.9. $y' - ytgx = y^4 \cos x, \quad y(0) = 1.$

10.10. $xyy' = y^2 + x, \quad y(1) = \sqrt{2}.$

10.11. $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y, \quad y(1) = 1.$

10.12. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y, \quad y(0) = 1.$

10.13. $y' - ytgx = -\frac{2}{3} y^4 \sin x, \quad y(0) = 1.$

10.14. $xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1.$

10.15. $2(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 1.$

10.16. $3(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 3.$

10.17. $yx' + x = -yx^2, \quad x(1) = 2.$

10.18. $y' - y + y^2 \cos x = 0, \quad y(0) = 2.$

10.19. $xy^2 y' = x^2 + y^3, \quad y(1) = \sqrt[3]{3}.$

10.20. $xy' - 2\sqrt{x^3}\, y = y, \quad y(2) = 8.$

10.21. $xy' + y = xy^2, \quad y(1) = 1.$

10.22. $y' - y = \frac{x}{y} e^x; \quad y(0) = 4.$

10.23. $xdx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy, \quad x(1) = \sqrt{2}.$

10.24. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}; \quad y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

10.25. $y'x + y = -xy^2; \quad y(1) = 2.$

Пример 11. Решить дифференциальные уравнения методом вариации произвольных постоянных:

11.1. $y'' + y = ctgx$.

11.2. $y'' + 4y = tg2x$.

11.3. $y'' + y = x\cos^2 x$.

11.4. $y'' + y = tgx$.

11.5. $y'' + 4y = ctg2x$.

11.6. $y'' + 2y' + y = xe^x$.

11.7. $y'' - 4y' = e^{2x} - e^{-2x}.$

11.8. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}.$

11.9. $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$.

11.10. $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$

11.11. $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x}.$

11.12. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-x3}}{x^3}.$

11.13. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$

11.14. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$

11.15. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$.

11.16. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

11.17. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$.

11.18. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

11.19. $y'' - 2y = xe^{-x}$.

11.20. $y'' - y = e^{2x} \sin(e^x)$.

11.21. $y'' - y = e^{2x} \cos(e^x)$.

11.22. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^3}$.

11.23. $y'' + 2y' = \frac{1}{\cos 3x}$.

11.24. $y'' + y = \frac{2}{\sin^2 x}$.

11.25. $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}$.

Пример 12. Решить систему дифференциальных уравнений:

12.1. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + e^x, \\ y_2' = y_1 + y_2 + x. \end{cases}$

12.2. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + \cos x, \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 + \sin x. \end{cases}$

12.3. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + x, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + 2x. \end{cases}$

12.4. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + x, \\ y_2' = 3y_1 + y_2 + x^2. \end{cases}$

12.5. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + e^{2x}, \\ y_2' = y_1 - y_2 + 2x. \end{cases}$

12.6. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 1, \\ y_2' = -5y_1 - 2y_2 + x. \end{cases}$

12.7. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2, \\ y_2' = -y_1 + y_2 + e^{3x}. \end{cases}$

12.8. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 + e^x, \\ y_2' = y_1 + 3y_2 - e^x. \end{cases}$

12.9. $\begin{cases} y_1' = y_2 - \cos x, \\ y_2' = 2y_1 + y_2. \end{cases}$

12.10. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2 + 4x + 1, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + x. \end{cases}$

12.11. $\begin{cases} y_1' = -2y_1 - y_2 + \sin x, \\ y_2' = 4y_1 + 2y_2 + \cos x. \end{cases}$

12.12. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - e^{-x}, \\ y_2' = -4y_1 + y_2 + xe^{-x}. \end{cases}$

12.13. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 4y_2 + e^x, \\ y_2' = 4y_1 + 5y_2 + 1. \end{cases}$

12.14. $\begin{cases} y_1' = -2y_1 - y_2, \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2 + x^2 + 1. \end{cases}$

12.15. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 3y_2 + xe^{2x}, \\ y_2' = 3y_1 - y_2 + e^{2x}. \end{cases}$

12.16. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + xe^{x}. \end{cases}$

12.17. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2 + e^{x}. \end{cases}$

12.18. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 1, \\ y_2' = -y_1 + y_2 + 2x. \end{cases}$

12.19. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2 - e^{3x}, \\ y_2' = -y_1 + 2y_2. \end{cases}$

12.20. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + x, \\ y_2' = -5y_1 - 2y_2 + x^2. \end{cases}$

12.21. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 - \cos 3x, \\ y_2' = -y_1 + 4y_2 + \sin 3x. \end{cases}$

12.22. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + e^{2x}. \end{cases}$

12.23. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 4y_2 + \cos x, \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 + \sin x. \end{cases}$

12.24. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 + e^{x}, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + 2xe^{x}. \end{cases}$

12.25. $\begin{cases} y_1' = -2y_1 - y_2 + e^{-x}, \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 - e^{-x}. \end{cases}$